This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000066829
Digitized by Google

Math. 310.

Math. 310

Digitized by Google

MECHANICA FLUIDORUM

SIVE

DE AEQUILIBRIO ET MOTU CORPORUM FLUIDORUM

TRACTATUS

IN ACADEMICIS PRAELECTIONIBUS SUIS EXPOSITUS

A D. OCTAVIANO CAMETTI

ABBATE VALLUMBROSANO

IN PISANA UNIVERSITATE

MATHESEOS PUBLICO PROFESSORE

ET REGIAE LUGDUNENSIS

ACADEMIAE SOCIO.



FLORENTIAE MDCCLXXVII.

EX TYPOGRAPHIA STECCHI ET PAGANI

SUPERIORUM FACULTATE.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRAEFATIO

MEchanica Fluidorum dividitur in duas partes, quarum una verſatur circa preſſiones, et varia aequilibria ſtagnantium fluidorum, altera autem circa illorum motum. Pars prima dicitur *Hydroſtatica*, et ſecunda *Hydraulica* appellatur. Archimedes (a) inter veteres primus fuit, qui tradidit Hydroſtaticae rudimenta; quippe nedum invenit, punctum quodlibet maſſae fluidae in aequilibrio conſtitutae aequaliter omni ex parte premi, ſed etiam ſitum, aut poſitionem determinavit, quam ſolidum inſidens fluido, habere debet, ut ipſi innatet. Verum haec ab ipſo ſparſa ſemina longo temporis intervallo ſterilia iacuerunt, uſquedum a ſagaci Galilaei ingenio faecundata, inciperent germinare. Hoc enim magnum Italiae noſtrae Lumen principia archimedea non ſolum expoſuit, ac luculentius explanavit, verum etiam novis acceſſionibus auxit, et illuſtravit. Imo cum ipſe philoſophos monuiſſet, aquam non ultra altitudinem octodecim cubitorum in antliis, ut loquuntur, ſuctoriis attolli poſſe, effecit ut eius diſcipulus Torricellius (b) in phae-

(a) In libro de inſidentibus humido.
(b) De motu gravium naturaliter deſcendentium.

Digitized by Google

phaenomenis explicandis feliciter pondus aeris adhiberet, vulgatumque errorem Veterum profligaret, qui ſuſpenſionem liquorum in tubis horrori vacui adſcribebant. Cum enim ſuſpicaretur, limitatam hanc altitudinem aquae in antliis a pondere externi aeris oriri poſſe, ut hac de re poſtea certior fieret, mercurio experimentum inſtituit, comperitque eventum conſilio reſpondiſſe.

Quod vero pertinet ad Hydraulicam, haec antiquis temporibus non admodum exculta fuit, nec notabilia incrementa cepit. Equidem non me latet, Cteſibium, et Heronem varios luſus, machinaſque hydraulicas conſtruxiſſe, quae partim oblectationi, et partim humanae vitae commodis inſerviebant; at hoc ad ſummum probare poteſt, aliquo ſaltem modo eis innotuiſſe effectus illos, qui oriuntur ab aeris preſſione, etſi veras cauſas, et accuratas menſuras in rebus hydraulicis ignorarent. Pariter licet Frontinus (a), aliique veteres (ut putant aliqui) cognoviſſent, velocitatem aquarum ex vaſe, aut caſtello aliquo effluentium augeri ob auctam aquae altitudinem ſupra locum, ex quo aqua effluit; nihilominus tamen negari nequit, illos omnino ignoraviſſe, in qua altitudinum ratione velocitates aquae ſoleant variare.

Benedictus Caſtellius (b) alter diſcipulus Galilaei,

(a) De Aquaeductis Urbis Romae commentarius.
(b) Della miſura dell' acque correnti ſtampato l' anno 1628.

laei, qui fluminum, aquarumque doctrinam non ſolum demonſtratione, verum etiam opere confirmavit, primus fuit inter Recentiores, qui de proportione inter aquae velocitates, et eius altitudines cogitavit; veram tamen non deprehendit, putans aquae velocitatem in ea ratione augeri, in qua altitudines eius creſcunt. Neque hoc mirum videri debet; quippe lex iſta nullo alio modo poterat definiri, quam pe effluxum aquae ex vaſe per minimum orificium in eius latere, vel in fundo. Id autem cum Torricellius (a) pro ea, qua erat ingenii acie praeditus, detexiſſet; phyſicis potius experimentis, quam mechanicis rationibus demonſtravit, aquae velocitates eſſe in ſubduplicata eius altitudinum ratione. Inventum hoc torricellianum tamquam rationi, et experientiae conſonum cum Mariotto (b) amplexus eſt Gulielminus (c), qui dein ipſum maxima cum Principum, et populorum utilitate currentibus aquis fluminum applicavit (d). Imo inventum hoc Torricellii mechanicis etiam rationibus a preſſionum doctrina ſumptis conatus eſt oſtendere Varignonius (e), cuius methodum poſtea Hermannus (f) quoque eſt imitatus.

Ve-

(a) De motu gravium naturaliter deſcendentium typ. edit. anno 1644.
(b) Traité ſur le mouvement des Eaux diſcours III. Reg. III. publié l' ann. 1686.
(c) Aquarum fluentium menſura nova methodo inquiſita typ. edit. 1687.
(d) Della natura de Fiumi ſtampato in Bologna l'anno 1697.
(e) Hiſt. de l'Accad. Roy., an. 1703.
(f) Phoronomia art. 360. pag. 215 typ. edit. 1716.

Digitized by Google

Velocitate relativa fluentis aquae hoc modo inventa, adhuc ſupererat inquirenda eius velocitas abſoluta, de cuius menſura nondum Hydraulici conveniebant. Cum autem arbitrarentur, menſuram hanc poſſe determinari per longitudinem columnae aquae, quae per datum foramen tempore dato tranſit; idcirco ad illam inveſtigandam experimenta plurima inſtituerunt. Et quidem Newtonus (a) non alia methodo hanc menſuram detegere eſt conatus, quam comparando eius theoriam cum quantitate aquae experimentis determinata. Ut autem modus a viro ſummo adhibitus percipiatur, fingendum imprimis cum ipſo eſt vas aliquod verticale, habens in eius fundo minimum orificium in tenui lamina excavatum, per quod effluere poſſit aqua. Fingendum eſt praeterea tantum aquae vaſi ſuperne affundi, quantum interea effluit per foramen, ſeu, quod idem eſt, aquam ſupra centrum foraminis conſtitutam in eadem ſemper altitudine permanere. Hoc poſito, idem Auctor integram maſſam aquae dividit in duas partes, quarum prima figuram habet ſolidi generati ex rotatione hyperbolae quarti gradus circa rectam lineam verticalem, quae per foraminis centrum tranſit; altera autem pars eſt reliqua eius portio, quae in vaſe remanet. Ponit ulterius, ſola ſtrata horizontalia aquae componentis hyperboloidem actu deſcendere ad foramen uſque; reliquam vero

aquam

(a) Philoſophiae Naturalis Principia Mathematica edita an. 1687.

aquam, quae hoc ſolidum omni ex parte ambit, prorſus immotam eſſe, velut ſi in glaciem verſa foret, adeo ut in aquae medio fiat quaedam ſpecies cataractae, vel infundibuli, quod continuo renovatur, dum ex adverſo alia lateralis perpetuo ſtagnans manet. Denique theoriam his hypotheſibus ſuperſtructam comparando cum quantitate aquae per orificium dato tempore effluentis, concludit, aquae velocitatem in ipſo foramine eam eſſe, quam acquirere poteſt grave cadendo, et motu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquae, eidem foramini incumbentis.

Cum autem ex una parte vir perſpicaciſſimus plane ſciret, aquam e vaſis foramine erumpentem reipſa habere velocitatem, non quidem dimidiae, ſed toti potius altitudini convenientem, et ex alia detexiſſet, venam aquae ita contrahi prae foramine, ut minima eius ſectio medietatem foraminis ferme aequaret; propterea in ſecunda ſui Operis editione mutavit (a) ſententiam ſuam, et foraminis loco ſubſtituendo ſectionem contractae venae, intulit, aquae velocitatem per foramen exilientis eſſe aequalem illi, quam acquirere poteſt grave cadendo, et motu ſuo deſcribendo altitudinem totam aquae foramini incumbentis. Unde ſalva manente theoria ab ipſo iam conſtituta in priori ſui Operis editione, utrique phaenomeno velocitatis, et quantitatis aquae

b dato

(a) Philoſophiae Naturalis Principia Mathematica edita ann. 1714.

dato tempore effluentis, quae ſibi contradicere videbantur, omnimode ſatisfecit.

Verum enim vero cataracta a Newtono excogitata tum experientiis, tum primis etiam hydraulicae legibus adverſatur; ſiquidem hae oſtendunt, particulas omnes aquae, ne illis quidem exceptis, quae vaſis lateribus adhaereſcunt, omni ex parte confluere ad foramen. Praeterea ſectio contractae venae non eſt in omnibus experimentis dimidia foraminis, per quod effluit, nec ſibimet conſtans ubique manet; ſed pro diverſa amplitudine orificii, atque craſſitie laminae, cui foramen ineſt, ſemper mutari ſolet, et ideo contractioni venae aqueae nulla poteſt accurata ſuperſtrui theoria.

Haec duo incommoda, quae occurrunt in methodo Newtoniana in cauſa fuerunt, ut inde Daniel Bernoullius (a) de invenienda altera methodo cogitaret. Hic autem Auctor imprimis ponit, extimam ſuperficiem aquae contentae in vaſe, quod ſenſim evacuatur, ſitum horizontalem perpetuo conſervare. Ponit praeterea, quod ſi tota maſſa fluida mente dividi concipiatur in ſtrata horizontalia numero infinita, et habentia idem volumen, haec, dum vas evacuatur, ſemper contigua eſſe debeant. Ponit tertio, particulas omnes fluidi, quae idem componunt ſtratum, aeque veloces eſſe, illas vero, ex quibus conſtant diverſa ſtrata, velocitates habere reci-

(a) Danielis Bernoullii Hydrodynamica edita ann. 1738.

ciproce proportionales reſpondentibus amplitudinibus ipſius vaſis. Quarto denique ut determinet motum cuiuſvis ſtrati, utitur principio conſervationis virium vivarum, quod ipſe etiam Hugenius demonſtravit, et quo aſſumitur, *ſi pondera quotlibet vi gravitatis ſuae moveri incipiant, ſingulorum velocitates ubique tales fore, ut producta ex earum quadratis in ſuas maſſas collecta, ſint proportionalia altitudini verticali, per quam centrum gravitatis ex corporibus compoſitae deſcendit, multiplicatae per maſſas omnium*. Putat ſiquidem vir doctiſſimus hoc principium quoque poſſe diverſis ſtratis eiuſdem fluidi applicari. Quandoquidem cum haec ſtrata per gradus inſenſibiles mutuo in ſe ſe agant, quin ſe percutiant; utique in maſſa fluida compoſita ex his ſtratis illud ipſum eveniat oportebit, quod ſolet accidere in ſyſtemate plurium corporum ſolidorum, quae per rectas lineas inflexibiles mutuo in ſe ſe agunt, et certam quamdam quantitatem motus diſtribuunt inter ſe.

Sed quamvis valeat hoc principium pro regulis motuum eruendis ex percuſſione, ſi modo corpora quae ſe collidunt, perfecte elaſtica eſſe ponantur; nemo tamen, quod ſciam, hactenus demonſtravit ipſum valere quoque pro inveſtigandis regulis motuum a propria gravitate ortorum, ac propterea etiam poſſe in corporibus non elaſticis, ac praecipue in fluidis adhiberi. Ponitur quoque in hoc principio, particulas omnes fluidi nullum alium habere motum quam verticalem, cum tamen ipſae,

praeſertim dum propius accedunt ad fundum vaſis, diverſis obliquis motibus ferri ſoleant. Videtur quoque non levi incommodo laborare hypotheſis, qua aſſumitur, particulas omnes eiuſdem ſtrati aeque veloces eſſe. Cum enim fluidum prope vaſis latera conſtitutum, ob reſiſtentiam frictionis, deſcendat tardius quam in medio; evidens eſt, non omnes particulas componentes unum idemque ſtratum velocitates omnino habere aequales.

Cum itaque Mac-Laurinius (a), et Ioannes Bernoullius (b) Danielis pater, eius theoriam incommodis hiſce obnoxiam comperiſſent, conati ſunt ſinguli aliam tradere huius problematis ſolutionem, quam magis directam, magiſque primis mechanicae regulis conſonam reputabant. Malo autem fato, quod ex ipſa rei natura prodit, factum eſt, ut etiam theoriae ab ipſis excogitatae, ſint pluribus arbitrariis hypotheſibus involutae. Ac re quidem vera mente concipit Mac-Laurinius integrum pondus fluidi in tres partes diviſum eſſe, quarum prima impendatur in accelerandum motum fluidi intra vas, altera intra foramen, et tertia denique in eius fundum unice comprimendum. Contra vero Ioannes Bernoullius pro hypotheſi aſſumit, integrum pondus fluidi impendi ſolum ad motus accelerationem in eius particulis producendam, totamque earum velocitatem

(etiam

(a) Traité des Fluxions publié l'ann. 1742.
(b) Hydraulique de M. Jean Bernoulli publié l'ann. 1743.

Digitized by Google

(etiam dum a maiori ad minorem tranſeunt ſectionem) a ſolo pondere proficiſci.

Hae ſunt, quas Hydraulica ſibi iam fecerat acceſſiones, quando ab incomparabili Alembertio (a) inventis aliis aucta fuit. Hic enim ut leges motus fluidi inveſtigaret, adhibuit illud idem principium generale, quo antea uſus fuerat in detegendo motu plurium corporum ſolidorum, quae mutuo in ſe ſe agunt. Et quamvis ipſe pariter illas omnes hypotheſes ſibi fingat, quas Daniel Bernoullius in ſua Hydrodynamica excogitavit; longe diverſam tamen methodum eſt ſequutus. Porro huius methodi beneficio devenit tandem ad aequationes motum fluidi exprimentes, a quibus veluti manu ductus, non ſolum expedite, et eleganter problemata illa ſolvit, quae fuerant iam ab aliis Geometris reſoluta, ſed etiam plurima alia nova, et difficillima, quae prima fronte inſolubilia videbantur. Fatetur autem vir ſagaciſſimus, quidquid in hac materia dici poteſt, duabus ad minus eſſe hypotheſibus limitatum. Prima eſt, quod deſcendente fluido intra vas, omnia eius ſtrata ſint ſemper invicem parallela. Altera eſt, quod omnes particulae cuiuſvis ſtrati verticalem ſolummodo motum habeant, et aequalibus velocitatibus progrediantur.

Quae cum ita ſint, quiſque ſibi facile ſuadebit, quam parum ſpei ſuperſit, absque ulla hypotheſi phy-

(a) Traité des fluides publié l'ann. 1744.

phyſica leges motuum pro fluidis ad regulas Geometriae purae aliquando redactum iri, cum vel in limine ipſo effugerint perſpicaciam viri ingenio praepollentis. Neque ego puto, quae ſum in hoc Opere traditurus, omnem rigorem mathematicum pati poſſe; principia enim, quibus mea quoque innititur theoria, phyſica ſunt, et non niſi ut veris proxima accipienda; admiſſis autem principiis, geometrica erunt omnia, nullisque obnoxia reſtrictionibus, et ideo neceſſario inter ſe nexu etiam cohaerebunt.

Expoſitis iis, quae ad alios pertinent, aequum eſt, ut de rebus quoque a me pertractatis rationem reddam. Breviter igitur, quantum potero, momenta ſuſcepti Operis indicabo. Quia penitus ignoramus figuram, exilitatem, et mutuam diſpoſitionem particularum, ex quibus fluidum eſt compoſitum; liquet, naturam fluidi non permittere, ut *a priori*, uti aiunt, determinetur lex preſſionis, quam ſolent eius particulae ſuperiores in inferiores alias exercere, et ideo non licebit de illa aliter iudicare quam *a poſteriori*, ſeu ex phaenomenis, quae conſtanter in quovis ſtagnante fluido obſervantur. Et quia conſtans nos docet experientia, quod quando fluidum contentum duobus tubis verticalibus aequalium diametrorum, et ope alterius intermedii inter ſe communicantibus, eſt immotum, tunc ambae eius ſuperficies in eodem ſunt plano horizontali; ideo hoc experimento tamquam principio utor in Hydroſtatica ad detegendam preſſionis legem, quae in ſtagnante

flui-

fluido obſervatur. Et ſane principio hoc admiſſo, oſtendo primum, quamlibet particulam immoti fluidi a circumiectis aequaliter omni ex parte premi, extimamque proinde eiuſdem fluidi ſuperficiem nil aliud eſſe quam portionem ſphaericae ſuperficiei, cuius centrum eſt idem cum centro terrae. Dein Bezoutii (a) ſemitis inhaerendo, etiam determino vim preſſionis horizontalis, et verticalis, quam fluidum contentum vaſe exercet in eius latera, et in fundum.

Menſura vis preſſionis hoc modo determinata, tranſeo ad gravitatem, et vim elaſticam aeris ſtabiliendam. Gravitas aeris, antiquis nota, et experimentis etiam confirmata (b), nullius ferme erat uſus in phaenomenis explicandis uſque ad tempora Torricellii. Ipſe Galilaeus, qui Ariſtotele duce, aerem in lagena accumulatum ponderavit (c), nunquam ſuſpicatus eſt aquam ab eius pondere in antliis ſuſtineri. Quod vero ſpectat ad aeris vim elaſticam, eius effectum ſub oculis habuit Galilaeus, dum ponderavit compreſſum aerem in lagena. Imo ipſemet Ariſtoteles (d) cum utres inflatos graviores eſſe quam vacuos deprehendit, compreſſo aere uſus eſt; non enim aliter eorum pondera aucta fuiſſent. Nihilominus tamen de aeris elaſticitate nemo ante Boileum egit; hic ſiquidem primus fuit, qui eam diſtincte

ex-

(a) Cours de Matematiques. Tom. 4. pag. 365.
(b) Ariſtoteles de coelo. lib. 4. cap. 4.
(c) Dialog. 1. Mechan.
(d) Ariſtoteles de coelo. lib. 4. cap. 4.

Digitized by Google

expoſuit, et experimentis etiam confirmavit (a). Talis autem eſt aeris vis elaſtica, ut ſi aliqua eius maſſa modo maiori, modo minori pondere ſit gravata, eiuſdem volumen ut plurimum minuatur in ea ratione, in qua pondus comprimens augetur, ac proinde locorum diſtantiae a ſuperficie extima atmoſphaerae ſpectandae erunt ut totidem logarithmi denſitatum aeris in eiſdem locis. Variae hinc ſequuntur theoriae huius applicationes ad ſuſpenſionem mercurii in Barometro, ad aquae effluxum in Siphone, et ad eius elationem in Antlia ſuctoria, aut aſpirante.

Aliam tandem aggredior theoriam duplici quidem, ſolidorum nempe, et fluidorum mechanica ſuperſtructam. Agit haec de motu, et aequilibrio corporum ſolidorum, quae fluidis ſunt immerſa. Porro, ut ſolidum inſidens fluido aequilibrium cum hoc ſervet, aut ipſi innatet, duo neceſſario requiruntur. Primum eſt, quod fluidum comprehenſum ſub volumine partis ſolidi, quae immerſa manet, tantundem ponderet, quantum ſolidum. Alterum eſt, quod centra gravitatis ſolidi, et eius immerſae partis in eadem ſint recta linea verticali.

Quod ſpectat ad aliam partem huius mechanicae fluidorum, principii loco aſſumo, ſuperficiem ſupremam fluidi contenti in vaſe, quod ſenſim evacuatur per aliquod orificium, manere ſemper hori-

zon-

(a) Exper. Phys. Mechan. et alibi.

zontalem. Hoc autem poſito, expendo motum fluidi per foramen aliquod erumpentis, et per ſolas mechanicae leges probo, quod ſi foramen ſit infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis, guttula illa fluidi, quae omnium prima e vaſe erumpit, ſollicitatur ad exitum vi conſtanti, ac proinde motu uniformiter accelerato tranſit per orificium; at ſtatim ac tota e vaſe effluxit, velocitatem acquirit convenientem toti altitudini fluidi eidem foramini incumbentis. Deinde oſtendo reliquas aquae guttulas, quae poſt primam effluunt per foramen, motu aequabili per hoc ferri cum ea quidem velocitate, quae debetur altitudini fluidi ſupra ipſum. Hoc quoque ſaltem quamproxime habet locum, dum foramen per quod emanat liquor, prae amplitudine vaſis eſt valde parvum, dummodo tamen eiuſdem ratio ad amplitudinem vaſis non maior ſit, quam ratio 1 ad 20. Propterea initio fluxus, ſeu quamdiu liquoris motus eſt uniformiter acceleratus, vis eum impellens ad effluxum aequalis eſt ponderi columnae fluidae eidem foramini incumbentis; at in momento immediate poſt hoc initium, ſeu quando liquor eſt motum aequabilem iam adeptus, vis quae liquorem ſollicitat ad effluxum, dupla eſt ponderis columnae fluidae, quae imminet orificio.

Modo ſupereſt inquirendum, an dum liquor contentus vaſe exit per orificium infinite parvum, aut valde parvum, revera eius motus theoriae hucuſque expoſitae ſit conformis. Daniel Bernoullius (a) obſer-

(a) Hydrodynamica ſect. 4. art. 3. pag. 62.

ſervavit, particulas cerae hiſpanicae cum aqueis permixtas una cum aqua in cylindrico vaſe vitreo ſic moveri, ut quae foraminis centro inſiſtunt, recta ad ipſum tendant, aliae vero omnes hinc inde poſitae, initio quidem deſcendant motu propemodum verticali; at cum propius accedunt ad fundum vaſis, tunc curſum ſuum flectentes, variis obliquis motibus confluant ad foramen. Hoc ipſum quoque Boſſutius (a) expertus fuit in cylindrico vaſe vitreo, in cuius latere orificium valde parvum erat; particulae enim aquae ſenſibiliter confluebant ad verticale hoc orificium eadem lege, qua in Bernoulliano experimento ad horizontale alterum concurrebant. Hinc in utroque caſu vena aquae proſilientis paullo infra foramen evadit gracilior, quam in eius ortu, ſive in ipſo foramine. Ratio autem, quae intercedit inter diametrum foraminis, et diametrum contractae venae non ſemper eadem obſervatur, ſed eo minor fieri deprehenditur, quo maior eſt craſſities laminae, cui foramen ineſt, adeo ut tandem evadat ratio aequalitatis, ſi foraminis nudi loco brevis tubulus cylindricus ſubſtituatur. Manente vero eadem craſſitie laminae, cui foramen ineſt, contractio venae eſt eo minor, quo maior viciſſim eſt ratio foraminis ad amplitudinem vaſis, et ideo ſi foramen ita augeri concipiatur, ut amplitudinem vaſis aequet, hoc eſt ſi ratio foraminis ad amplitudinem vaſis evadat ratio

ae-

(a) Traité D. Hydrodynamique Tom. 2. art. 3. pag. 2.

aequalitatis; tunc venae contractio penitus evaneſcat.

Vena aquae effluentis per nudum foramen in tenui lamina excavatum inaequaliter denſa eſt, et denſitas eius creſcit pergendo ab orificio usque ad eius maximam contractionem, ubi rurſus acquirit conſiſtentiam naturalem. Huius autem phaenomeni ratio eſt, quia nonnullae eius particulae ita oblique dirigunt ſuos curſus foramen verſus, ut arceant ab effluxu aliquas vicinarum. Et quia (ut ſuo loco oſtendam) plures particulae arcentur ab exitu per nudum foramen, quam per brevem tubulum eidem foramini applicatum; propterea plus aquae tempore dato fluit per tubum, quam per foramen.

A vena aquae effluentis per minimum orificium ad alteram tranſeo, quae exilit per foramen non valde parvum relate ad amplitudinem vaſis. Et quoniam hoc in caſu particulae aquae poſitae in orificio, pro diverſis earum diſtantiis ab aquae extima ſuperficie diverſas quoque habent velocitates; idcirco imprimis quaero velocitatem huius venae, eaque inventa, determino vim, qua ſphaeram, cylindrum, et planum ferit. His plurima etiam addo tum circa ſemitam, quam deſcribit aqua proſiliens per foramen, aut lumen tubi ſecundum rectam horizontalem, aut horizonti quomodolibet inclinatam, tum etiam circa temporum proportionem, quibus diverſa vaſa cylindrica aquae plena per aequalia, et inaequalia foramina evacuantur.

Digitized by Google

Quae hactenus ſunt expoſita viam ſternunt ad menſuram inveniendam reſiſtentiae fluidorum. Corpus, quod in ſtagnanti fluido promovetur, duo praeſtare ſolet; primo enim dividit partes fluidi, ſecundo illis communicat velocitatem, cum qua etiam poſt ceſſatam corporis actionem inter ſe moventur. Diviſioni partium fluidi reſiſtit earum tenacitas, aut cohaeſio; communicationi autem velocitatis reſiſtit inertia, aut reactio partium earundem. Quapropter fluidi reſiſtentia ex duplici cauſa oritur, ex tenacitate nimirum, et inertia eius particularum. Hic autem expendo primum omnes retardationes, quas corpus motum in fluido ob inertiam huius patitur. Tranſeo dein ad illas examinandas, quas pati ſolet ob ſolam eius partium tenacitatem. Determino tandem tam motus retardationes ab hiſce duabus cauſis ſimul agentibus oriundas, quam punctum ſpatii, ubi corpus vel dimidiam, vel totam amittit velocitatem, qua initio motus in fluido ferebatur. Et quia tota haec theoria praecipuis proprietatibus Logarithmicae eſt innixa; idcirco ſeptem Lemmata praemittuntur, in quibus huius curvae principalia ſymptomata demonſtrantur. Poſita vero hac doctrina logarithmorum, facile mihi fuit illa omnia theoremata demonſtrare, quae Graveſandius agens de reſiſtentia fluidorum in nonnullis Phyſicae ſuae ſcholiis brevius, et obſcurius quam par erat demonſtravit.

Iuxta theoriam a nobis expoſitam, reſiſtentia, quam ab inertia fluidi ſubit planum motu ſibi ſemper

pa-

parallelo latum in eodem fluido quieſcente, aequalis eſt ponderi cylindri ex eodem fluido, cuius baſis eſt idem planum, et cuius altitudo eſt dupla illius, ex qua grave in vacuo deſcendendo acquirere poteſt velocitatem, qua planum in fluido promovetur. Id autem ſolum obtinet in hypotheſi, quod particulae fluidi ſtatim ac a plano exceperint percuſſionem, vel evaneſcant, vel ad latera deflectentes locum praebeant ictibus inſequentium. Cum vero particulae fluidi immediate poſt percuſſionem nec in nihilum abeant, neque ad latera flecti poſſint, ideo hac re ſolum conſiderata, reſiſtentia vera, ſeu actualis maior theoretica eſſe deberet.

Hinc haud parvam admirationem movebunt experimenta a tribus viris doctiſſimis nuper capta (a) ex quibus reſiſtentiam veram, ſive actualem duplo minorem theoretica eſſe colligitur. Siquidem illa oſtendunt, reſiſtentiam perpendicularem, et directam planae ſuperficiei, quae ſibi ſemper parallela movetur intra fluidum indefinitum, aequalem eſſe ponderi columnae ex eodem fluido, quae ſuperficiem percuſſam pro baſi habet, et pro altitudine illam, quae debetur velocitati, cum qua eadem fit percuſſio.

Puto tamen, ni fallor, hanc notabilem differentiam, quae in illis experimentis detecta fuit inter [illegible]

(a) Nouvelles eſperiences ſur la reſiſtence des fluides par MM. d'Alembert, le Marquis de Condorcet, & l'Abbé Boſſut. A Paris 1777.

ter actualem, et theoreticam reſiſtentiam, magna ſaltem ex parte oriri ex motu, qui ab ipſo ictu imprimitur fluido quieſcenti. Sicuti enim dum fluidum in motu poſitum perpendiculariter, et directe ferit planam, et immotam aliquam ſuperficiem, plures eius particulae poſt percuſſionem eadem via qua iverant, revertentes, motum, et ictum minuunt inſequentium: ita dum plana aliqua ſuperficies in quieſcente fluido promovetur, plures huius particulae percuſſae ab illa, ſecundum viam, qua facta in ipſis impreſſio fuit, progredientes, ad ſimilem motum concitant viciniores, quae proinde planae ſuperficiei intra fluidum incedenti reſiſtere minus debent, quam ſi omnino immotae eſſent.

Ex analogia, quae obſervatur inter motum venae aqueae e vaſe per orificium, aut tubulum emanantis, et motum aquae in fluminis alveo decurrentis; liquet doctrinam hactenus demonſtratam poſſe etiam curſui fluminum applicari. Itaque imprimis ago de libero curſu fluminum, qualis nimirum futurus eſſet, ſi in eorum alveis nihil foret, quod motum ab aqua fluminis iam conceptum aut minueret, aut elideret. Tranſeo dein ad expendendos curſus fluminum impeditos, ubi in totidem theorematis expono omnes regulas generales a Gulielmino propoſitas circa aquarum motus in reſiſtentibus alveis progredientium. Poſt haec ſuccedunt propoſitiones variae circa modum, quo ſolet flumen convenientem alveum ſibi efficere tam per fundi ex-

ca-

cavationem, quam per depoſitionem materiae extraneae in eo factam. Progredior inde ad mutationes, quae propter obiectam flumini cataractam, in eius alveo producuntur. Fateor quidem, quod ob oppoſitam flumini cataractam, paullatim attolli debeat eius fundus; nego tamen eundem fore ad tantam altitudinem evehendum, ut novus fundus congruere tandem debeat cum illo plano, quod per faſtigium cataractae traduci poteſt fundo veteri parallelum. Quapropter a cataractis non imminet tantum mali, quantum vulgo exiſtimatur. Poſtremo hic Tractatus clauditur theoria de effectibus illis agente, qui ab unione, et diviſione fluminum producuntur. In ea vero ex datis altitudinibus, et latitudinibus duorum fluminum ſenſibiliter horizontalium quaero altitudinis incrementum, quod illorum alterutrum adipiſcetur, poſtquam alterius aquas in alveo ſuo exceperit. Oſtendo pariter ex adverſo quantum erit altitudo fluminis minuenda, poſteaquam deducta ex eo fuerit quantitas data aquae, ſimulque infero, diductionem aquae fluminis in canalem de induſtria excavatum ad alluviem ab agris finitimis avertendam, plus detrimenti, quam commodi allaturam eſſe.

Haec ſunt praecipua capita, de quibus ago in hoc Tractatu, qui quamvis ut phyſicus potius, quam mathematicus ſit cenſendus; conatus ſum tamen in eo tradendo ſequi ordinem Geometricum, ſive ita omnia pertractare, ut ex primis praemiſſis ſingula

dedu-

Digitized by Google

deducantur, nihilque non demonſtratum poſt ſe relinquant. Id autem non alia ex cauſa praeſtiti, quam ut veritates, quae in propoſitionibus exponuntur, melius perciperentur, ſicque illis adoleſcentibus opem ferrem, qui ultra ſyntheſim non progreſſi dabunt operam rei aquariae. Si res ſucceſſerit ex ſententia, voti me compotem exiſtimabo; ſin minus, nemo me, uti arbitror, reprehendet, quod ad commodum hoc praeſtandum ſummam, quantum potui, diligentiam adhibuerim.

MECHA-

MECHANICAE FLUIDORUM

PARS PRIMA

CAPUT I.

De natura corporum fluidorum, eorundemque aeque ac ſolidorum ſpecifica gravitate.

DEFINITIO I.

1. FLuidum eſt corpus omne, cujus particulae cedunt cuicunque minimae impreſſioni, et cedendo, moventur facile inter ſe.

COROLLARIUM I.

2. Particulae ergo fluidi cujuſcunque ſumme mobiles eſſe debent, ideoque cum invicem ſeparatae, tum etiam ita exiguae molis erunt, ut nequeant humanis ſenſibus internoſci, atque diſtingui.

COROLLARIUM II.

3. Hinc quotieſcunque particulae dati corporis videri a nobis, aut tangi poſſunt, ipſum non poterit corpus fluidum appellari. Ita licet farina conſtet particulis minutiſſimis, quae levi digito moveantur; nihilominus quia ipſae duobus digitis interceptae, atque compreſſae, facile ſentiuntur; farina nequit corpus fluidum appellari. At ſi particulae ejus fiant poſtea tam exiguae, ut non amplius poſſint humanis ſenſibus internoſci, atque diſtingui, veluti accidit quando panis attritus dentibus, et ſubactus actioni ventriculi, et inteſtinorum, in chylum, et ſanguinem tranſmutatur; tunc proprietates, nomenque fluidi adipiſcitur.

Digitized by Google

Corollarium III.

4. Particulae quoque fluidi eſſe debent ſumme terſae, ac levigatae. Nam ſi ſcabritie aliqua donarentur, ipſae non poſſent ſine frictione aliqua promoveri, atque ita non cederent cuicunque minimae, ac nobis inſenſibili impreſſioni, nec cedendo, moverentur facile inter ſe, quod (1) eſt abſurdum.

Corollarium IV.

5. Quin etiam magnitudo illarum contactus minima eſſe debet. Cum enim (1) cedant cuicunque minimae, ac nobis inſenſibili impreſſioni, et cedendo, moveantur facile inter ſe; ipſae habebunt quoque minimam cohaeſionem. Atqui cohaeſio ex denſitate particularum, et ex mutui contactus magnitudine ortum ducit; ergo et magnitudo illarum contactus minima eſſe debet.

Scholion I.

6. Haec ſunt, quae de particulis corporis perfecte fluidi certo ſcimus, ſi tamen inter fluida, quae in rerum natura ſunt, perfectum fluidum actu detur. Omnia enim fluida, quae cognoſcimus, praedita ſunt ſenſibili cohaeſione. Haec autem cohaeſio in variis fluidis eſt diverſa, et ſaepe etiam in eodem fluido, ob calorem, frigus, et phyſicas alias cauſas, minuitur, vel augetur.

Scholion II.

7. Quod autem pertinet ad figuram, exilitatem, et mutuam diſpoſitionem particularum, ex quibus fluidum eſt compoſitum, haec veluti dubia, et incerta phyſicis relinquemus, nobisque ſufficiet noſſe, figuras particularum cuiuſvis fluidi, quaecunque eae ſint, non obſtare ſummae earum nobilitati.

Scholion III.

8. Quamvis omnimode ignoremus figuram, exilitatem, et mutuam diſpoſitionem particularum corporum fluidorum, novimus tamen ipſas eſſe eiuſdem indolis, ac naturae cum illis corporum ſolidorum; nam fluida ſaepe in ſolida, et ſolida in fluida verti ſolent. Atqui particulae corpora ſolida componentes, pro ratione materiae quam continent, graves ſunt; igitur etiam illae, ex quibus fluida coaleſcunt, gravitatem habebunt quantitati materiae, quam continent, proportionalem. Unde ſi aliae aliis ſint verticaliter inſiſtentes, inferiores a ſuperiorum ponderibus comprimentur.

Digitized by Google

DEFINITIO II.

9. *Fluidum incompreſſibile* illud eſt, quod utcunque preſſum reduci nequit in ſpatium minus illo, quod ſolet naturaliter occupare. *Fluidum compreſſibile* illud eſt, quod aliqua vi compreſſum reduci poteſt in ſpatium minus illo, quod ſolet naturaliter occupare.

DEFINITIO III.

10. *Fluidum elaſticum* illud eſt, quod nedum indeſinenter expandere ſe conatur, ſed etiam in ſpatium maius illo, quod antea occupaverat, ſe expandit, quoties a nullo ambiente corpore impeditur. Conatus autem hic expanſivus, qui indeſinenter a fluido exercetur, eius *elaterium*, ſeu *vis elaſtica* nuncupatur.

DEFINITIO IV.

11. Duo corpora, ſive ſolida, ſive fluida dicuntur *habere eandem ſpecificam gravitatem*, ſive *eſſe in ſpecie aeque gravia*, ſi ſub aequali volumine contineant aequale pondus.

SCHOLION

12. Sint duo globi aequales, quorum diameter ſcilicet unius pedis; alter ligneus, alter ex cera factus, et contineant ambo aequale pondus; ipſi habebunt quoque eandem ſpecificam gravitatem, ſive erunt in ſpecie aeque graves.

DEFINITIO V.

13. Corpus *ſpecifice gravius eſt*, quod ſub eodem volumine maius continet pondus, quam alterum. Corpus *ſpecifice levius eſt*, quod ſub eodem volumine minus pondus continet, quam alterum.

SCHOLION

14. Sint duo globi aequales, quorum diameter ſcilicet unius pedis; alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus continet maius pondus, quam ligneus, etiam ſpecifice gravior erit, et ligneus ſpecifice levior.

Digitized by Google

DEFINITIO VI.

15. Duo corpora dicuntur *habere eandem denſitatem*, ſi ſub eodem volumine contineant aequalem maſſam, aut materiae quantitatem.

DEFINITIO VII.

16. *Corpus denſius eſt*, quod ſub eodem volumine continet maiorem maſſam, quam alterum. *Corpus rarius eſt*, quod ſub eodem volumine continet minorem maſſam, quam alterum.

DEFINITIO VIII.

17. *Fluidum homogeneum* illud eſt, cuius denſitas per univerſam maſſam eſt uniformis. Talia ſunt ferme omnia fluida nobis nota.

DEFINITIO IX.

18. *Fluidum heterogeneum* illud eſt, cuius denſitas per univerſam maſſam eſt difformis. Tale fluidum eſt atmoſphaera, cuius partes magis remotae a ſuperficie terrae, ſunt inferioribus rariores. Docet enim experientia, aerem in altiorum montium verticibus conſtitutum, eſſe rariorem illo, qui in vallibus, et in maris littore collocatur.

SCHOLION

19. Cum deinceps de fluidis erit ſermo, eadem (niſi aliter moneatur) ſemper eſſe incompreſſibilia, homogenea, et non elaſtica ſupponentur.

PROPOSITIO I.

20. *Si duo corpora* A *et* B (*Fig.* 1.) *volumine inaequalia, eandem habuerint ſpecificam gravitatem; pondus corporis* A *erit ad pondus corporis* B, *ut volumen primi* A *ad volumen ſecundi* B.

Quoniam corpora A et B eandem (ex hyp.) habent ſpecificam gravitatem, utique ſi eorum volumina aequarentur, etiam pondera (11) aequalia eſſent. At ſi volumen corporis A duplo maius eſſet volumine alterius B, tunc dividi illud poſſet in volumina duo aequalia tum inter ſe, tum etiam volumini alterius B, et cum hoc quoque aequaliter (11) ponderantia; ideoque pondus corporis A eſſet pariter duplum ponderis alterius B. Eadem ratione, ſi volumen corporis A eſſet triplo, aut quadruplo maius volumine alte-

rius

Digitized by Google

rius B; etiam pondus corporis A triplum, aut quadruplum eſſet ponderis alterius B; et ſic deinceps. Propterea generatim pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut volumen primi A ad volumen ſecundi B.

PROPOSITIO II.

21. *Si duo corpora A et B (Fig. 2.) volumine aequalia, diverſam habeant denſitatem; denſitas corporis A erit ad denſitatem corporis B, ut pondus primi A ad pondus ſecundi B.*

Corpus A (16) dicitur duplo denſius alio B, ſi eius maſſa ſit dupla illius, quam continet aliud B; dicitur triplo denſius, ſi tripla; quadruplo denſius, ſi quadrupla; et ſic deinceps. Igitur denſitates corporum A et B in ea creſcunt ratione, in qua augentur eorum maſſae; ideoque denſitas corporis A erit ad denſitatem corporis B, ut maſſa primi A ad maſſam ſecundi B. Sed etiam pondus corporis A eſt ad pondus corporis B, ut maſſa corporis A ad maſſam corporis B; ergo et denſitas corporis A erit ad denſitatem corporis B, ut pondus primi A ad pondus ſecundi B.

PROPOSITIO III.

22. *Si duo corpora A et B (Fig. 2.) volumine aequalia, habeant diverſas ſpecificas gravitates; gravitas ſpecifica primi A erit ad ſpecificam gravitatem ſecundi B, ut pondus primi A ad pondus ſecundi B.*

Corpus A (13) dicitur eſſe duplo gravius in ſpecie alio B, ſi eius pondus ſit duplum illius, quod continet aliud B; dicitur triplo gravius, ſi triplum; quadruplo gravius, ſi quadruplum; et ſic ſemper. Ergo ſpecificae gravitates corporum A et B in ea ratione creſcunt, in qua augentur pondera eorundem; ideoque gravitas ſpecifica corporis A erit ad illam corporis B, ut pondus primi A ad pondus ſecundi B.

COROLLARIUM

23. Cum etiam denſitas corporis A ſit (21) ad denſitatem corporis B, ut pondus corporis A ad pondus alterius B; conſequens eſt, ut etiam gravitas ſpecifica corporis A ſit ad illam corporis B, ut denſitas corporis A ad denſitatem corporis B.

PROPOSITIO IV.

24. *Pondera duarum corporum A et B (Fig. 3.) ſunt in ratione compoſita gravitatis ſpecificae corporis A ad gravitatem ſpecificam corporis B, et voluminis corporis A ad volumen corporis B.* Gra-

Digitized by Google

Gravitas ſpecifica corporis A ſit ad gravitatem ſpecificam corporis B, ut D ad E, et volumen corporis A ſit ad volumen corporis B, ut E ad F. Hoc poſito, finge alterum corpus C eiuſdem eſſe voluminis cum primo A, et eiuſdem ſpecificae gravitatis cum alio B. Cum ergo corpora A et C volumina aequalia habeant, pondus corporis A erit (22) ad pondus corporis C, ut gravitas ſpecifica corporis A ad ſpecificam gravitatem corporis C, vel B, ſive ut D ad E. Rurſus quia corpora C et B eandem habent ſpecificam gravitatem, pondus corporis C erit ad pondus corporis B (20), ut volumen corporis C, vel A ad volumen corporis B, ſive ut E ad F; ergo ex aequo, pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut D ad F. Eſt autem D ad F in ratione compoſita D ad E, et E ad F; ergo etiam pondus corporis A erit ad pondus corporis B in ratione compoſita gravitatis ſpecificae corporis A ad gravitatem ſpecificam corporis B, et voluminis corporis A ad volumen corporis B.

Corollarium I.

25. Quia gravitas ſpecifica corporis A eſt (23) ad gravitatem ſpecificam corporis B, ut denſitas corporis A ad denſitatem corporis B; etiam pondus corporis A erit ad pondus corporis B in ratione compoſita denſitatis corporis A ad denſitatem corporis B, et voluminis corporis A ad volumen corporis B.

Corollarium II.

26. Si itaque conſtruantur duo rectangula M et N (Fig. 4), quorum baſes G et g referant ſpecificas gravitates corporum A et B, altitudines autem V et u exponant volumina eorundem; pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad rectangulum N. Sunt enim haec rectangula in ratione compoſita baſis G ad baſim g, et altitudinis V ad altitudinem u, hoc eſt in ratione compoſita gravitatis ſpecificae corporis A ad gravitatem ſpecificam corporis B, et voluminis corporis A ad volumen corporis B. Sed in hac compoſita ratione (24) eſt quoque pondus corporis A ad pondus corporis B; ergo et pondus corporis A erit ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad aliud N.

PROPOSITIO V.

27. Si *aequalia ſint pondera corporum* A *et* B (*Fig.* 4); *illorum ſpecificae gravitates erunt inverſe ut volumina eorundem. Et ſi illorum ſpecificae gravitates ſint inverſe ut volumina eorundem; etiam pondera aequalia erunt.*

I. Fiant rectangula M et N, quorum baſes G et g exponant ſpecificas gravitates corporum A et B, altitudines autem V et u referant volumina

eo-

eorundem. Hoc poſitò, erit (26) pondus corporis A ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad aliud N. Sed (ex hyp.) ſunt aequalia pondera corporum A et B; igitur aequabuntur etiam rectangula M et N. Sed aequalia rectangula reciprocant baſes, et altitudines; ergo G erit ad g, ut u ad V. Atqui (ex conſtr.) G eſt ad g, ut gravitas ſpecifica corporis A ad gravitatem ſpecificam corporis B, et (ex conſtr.) u eſt ad V, ut volumen corporis B ad volumen corporis A; ergo etiam gravitas ſpecifica corporis A erit ad illam corporis B, ut volumen corporis B ad volumen corporis A, ideoque ſpecificae gravitates corporum A et B erunt inverſe ut volumina eorundem.

II. Quia gravitates ſpecificae corporum A et B (ex hyp.) ſunt inverſe ut volumina eorundem; gravitas ſpecifica corporis A erit ad illam corporis B, ut volumen corporis B ad volumen corporis A, hoc eſt G erit ad g, ut u ad V, conſequenter rectangulum M aequabitur ipſi N. Sed pondus corporis A eſt (26) ad pondus corporis B, ut rectangulum M ad aliud N; ergo et pondus corporis A aequabitur ponderi alterius B.

CAPUT II.

De menſura vis preſſionis, quae a particulis fluidi in aequilibrio poſiti exercetur in alias circumiectas, atque in fundum vaſis, quo idem fluidum continetur.

DEFINITIO X.

28. HYdroſtatica eſt ſcientia, quae agit de fluidorum corporum aequilibrio.

SCHOLION

29. Hoc aequilibrium ortum ducit ab eliſione omnium virium, quae ſimul agunt premendo vel particulas ipſas fluidi, vel latera, et fundum vaſis, quo fluidum continetur, vel denique corpus ſolidum ipſi immerſum.

SCHOLION II.

30. Si nota eſſet figura, et mutua diſpoſitio particularum, ex quibus fluidum eſt compoſitum, tunc etiam poſſet per principia mechanica determinari lex preſſionis, quam ſervat fluidum in aequilibrio conſtitutum; nam data figura, et mutua diſpoſitione plurium

cor-

Digitized by Google

corporum inter ſe iunctorum, et exiſtentium in aequilibrio, ſemper poteſt determinari actio mutua eorundem. Atqui nos latet (7) figura, et mutua diſpoſitio particularum, ex quibus fluidum coaleſcit; ergo nec etiam poterit per principia mechanica determinari lex preſſionis, quam ſervat fluidum in aequilibrio conſtitutum. Supereſt ergo ut videamus, an haec lex ſaltem poſſit aliquo experimento cuivis obvio determinari.

EXPERIMENTUM

31. Si ex tribus tubis D A B C, B C E F, E F G H (Fig. 5. 6) aequalium diametrorum fiat canalis D A B F G H, et aqua infundatur verticali tubo D A B C; haec, percurſo tubo B C E F, aſcendet ſtatim per verticalem alterum E F G H. Ceſſante vero hac infuſione, aqua in canali poſita non quieſcit, niſi prius in verticalibus tubis D A B C, E F G H eandem obtineat altitudinem, ſeu niſi eius ſuperficies M N, S V in eodem ſint plano horizontali.

SCHOLION

32. En ergo quod circa aequilibrium fluidorum conſtans nos docet experientia, quaecunque ſit inclinatio tubi B C E F, et quodcunque ſit fluidum poſitum in canali D A B F G H. Reliquum eſt modo, ut ex hac ſola, et cuivis obvia immoti fluidi proprietate determinetur lex preſſionis, quam ſervat fluidum in aequilibrio conſtitutum.

PROPOSITIO VI.

33. *Fluido manente immoto, eius particulae inferiores exerunt omnes partes verſus preſſionem illam, quam ſubeunt a gravitate fluidi ſuperioris.*

Canali D A B F G H (Fig. 5. 6) inditum ſit fluidum N M B F V S, quo manente immoto, ſuperficies eius M N, S V in eodem (31) erunt plano horizontali. Iam ſi per quodlibet punctum I traduci intelligatur horizontale planum I O; tunc quia ſuperficies I K, L O fluidi K I B F O L ſunt poſitae in hoc plano, fluidum idem (31) erit in aequilibrio, et ideo eius pondus conferre nequit ad ſuſtinendas columnas M K, S O, quae propterea in aequilibrio adhuc eſſent, etiamſi fluidum K I B F O L ex improviſo amitteret gravitatem. Fluidum ergo K I B F O L ſpectandum eſt unice velut medium, cuius ope columnae M K, S O ita communicant inter ſe, ut ipſum in columnam S O transferat eam preſſionem, quam particulae fluidi K I B C verticaliter ſubeunt a gravitate columnae M K, et viceverſa in co-

Digitized by Google

lumnam M K transferat eam preſſionem, quam particulae fluidi O L E F verticaliter ſubeunt a gravitate columnae S O. Atqui fluidum K I B F O L has preſſiones transferre nequit in verticales columnas S O, M K, niſi prius ipſae aequaliter propagentur per fluidum contentum tubo B C E F; igitur preſſiones, quas particulae fluidorum K I B C, O L E F verticaliter ſubeunt a gravitate columnarum M K, S O, aequaliter propagantur per fliuidum contentum tubo B C E F. Id autem evenit ſemper, quaecunque ſit inclinatio tubi B C E F; ergo particulae fluidi inferiores exerunt omnes partes verſus, et quidem aequaliter preſſionem illam, quam ſubeunt a gravitate fluidi ſuperioris.

PROPOSITIO VII.

34. *Particula quaevis* H (*Fig.* 7.) *fluidi immoti, et contenti vaſe* A B C D, *deorſum premitur a pondere filamenti* F H, *eidem verticaliter inſiſtentis.*

Finge integram maſſam fluidam A B C D, unico filamento F H excepto, in ſolidam ita verti, ut nec volumen, nec locum mutet. Hoc facto, particula H in eodem compreſſionis ſtatu perſeverabit, in quo antea reperiebatur. Atqui dum ſolum filamentum F H eſt fluidum, particula H deorſum premitur (8) a pondere filamenti F H; ergo etiam deorſum eodem pondere premebatur, dum tota maſſa erat fluida.

PROPOSITIO VIII.

35. *Particula quaevis* H (*Fig.* 7.) *fluidi immoti, et contenti vaſe* A B C D, *omnes partes verſus exerit preſſionem omnino aequalem ponderi filamenti* F H, *eidem verticaliter inſiſtentis.*

Particula inferior H (33) omnes partes verſus eam exerit preſſionem, quam verticaliter deorſum ſubit a gravitate fluidi ſuperioris. Sed preſſio quam verticaliter deorſum ſubit a gravitate fluidi ſuperioris, aequatur ponderi (34) filamenti F H; ergo particula eadem H omnes partes verſus exerit preſſionem omnino aequalem ponderi filamenti F H.

COROLLARIUM I.

36. Ergo particula eadem H vicinas alias, a quibus omni ex parte tangitur, comprimet vi aequali ponderi filamenti F H.

COROLLARIUM II.

37. Et quia preſſione hac non obſtante, particulae intermediam H tangentes, non moventur de locis ſuis; conſequens eſt, ut ipſae

Digitized by Google

viciſſim comprimant aliam H vi, quae aequatur ponderi filamenti F H. Ex harum autem aequalium, et directe oppoſitarum virium eliſione oritur in tota maſſa fluida aequilibrium.

Corollarium III.

38. Quoniam perinde eſt, ſive particula H prematur a pondere filamenti F H ſuperius incumbentis, ſive a vi alia verticali, quae eidem ponderi ſit aequalis; utique ſi particula H prematur vi qualibet verticali, eadem ſimiliter premet vicinas alias, a quibus tangitur omni ex parte, et viceverſa aequaliter, ſive eadem vi ab illis omnibus comprimetur.

PROPOSITIO VIII.

39. *Si vaſe* M N O P (*Fig.* 8.) *contineatur immotum fluidum* L N O S; *eius ſuperficies ſuprema erit horizontalis*.

Curva L B S referat ſupremam immoti fluidi ſuperficiem, et in ea ſumpta particula quavis B, eius vis gravitatis exponatur per rectam verticalem B F. Deinde acceptis hinc inde a puncto B duobus curvae contiguis elementis B C, B A, quae velut rectae lineae ſunt habenda, ad illa ex puncto F agantur parallelae F A, F C, ut ita emergat parallelogrammum A B C F. Particula B (ex conſtr.) verticaliter deorſum premitur vi B F. Sed haec vis eundem effectum edit, quem binae ſimul vires B A, B C; ergo particula B cenſenda eſt velut preſſa his duabus viribus ſimul ſumptis. Sed hiſce viribus non obſtantibus, particula eſt immota; conſequens ergo erit, ut vires B A, B C elidantur a duabus aliis, quae ſint ipſis directe oppoſitae, et aequales. Sed huiuſmodi vires nequeunt eſſe aliae praeter illas, quas duae propinquae particulae hinc inde aliam B tangentes, in eam exerunt iuxta directiones A B, C B; ergo hae duae particulae comprimunt aliam B viribus A B, C B. Sed hae duae particulae (38) viribus aequalibus comprimunt aliam B; ergo aequales erunt rectae A B, C B, et ideo parallelogrammum A B C F omnia latera aequalia habebit, ac propterea angulus F B A aequabitur F B C. Atqui angulus A B C, quem continent duo curvae contigua elementa B A, B C, deficit a duobus rectis quantitate infinite parva; ergo aequales anguli F B A, F B C quamproxime recti erunt, et ſic gravitatis directio B F erit perpendicularis ad duo curvae L B S elementa contigua B A, B C. Simili modo oſtendam, directionem gravitatis omnium aliarum particularum perpendicularem eſſe ad reliqua alia omnia elementa ſuperficiei L B S; ergo ipſa erit quoque perpendicularis huic ſuperficiei. Sed cum directio gravitatis eſt perpendicularis ad aliquam ſuperficiem, haec dicitur horizontalis; ergo et ſuperficies L B S erit horizontalis.

Cor.

Digitized by Google

Corollarium

40. Unde ſi Tellus ſphaerica ſupponatur, et gravium directiones dirigantur ad eius centrum; immoti fluidi ſuperficies L B S erit pars ſphaericae ſuperficiei, Telluri concentricae. Sola enim ſuperficies ſphaerica talis eſt, ut rectae omnes perpendiculariter ad illam ductae, conveniant ſimul ad eius centrum. Sed directiones gravitatis aequalium particularum ſuperficiei L B S ſunt (39) perpendiculares ad hanc ſuperficiem, et (ex hip.) conveniunt omnes ad centrum terrae; ergo haec ſuperficies L B S erit pars ſphaericae ſuperficiei, Telluri concentricae.

Scholion

41. Haec propoſitio habet locum in quavis hypotheſi gravitatis; imo quacunque vi particulae aequales fluidi animentur, eius directio erit ſemper perpendicularis ad ſupremam immoti fluidi ſuperficiem. Cum vero hic ſolum de corporibus Telluri proximis diſſeramus, ponimus cum Galilaeo gravitatem conſtantem eſſe, ſive in aequales materiae particulas aequaliter ſemper agere.

PROPOSITIO IX.

42. *Si ſuperficies immoti fluidi, quod vaſe aliquo continetur, ſolummodo ſe extendat ad 16 hexapedas Pariſinas; eadem phyſice plana erit, ſive cenſeri poterit velut plana.*

Iuxta Piccardi (a) obſervationes longitudo unius gradus circuli terrae maximi conſtat 57600 hexapedis Pariſinis. Atqui unus gradus eſt minutorum ſecundorum 3600; ergo longitudo minutorum ſecundorum 3600 circuli terrae maximi conſtabit hexapedis 57600. Unde ſi fiat, ut 3600 ad 57600, ita 1 ad quartum terminum proportionalem, qui quamproxime erit 60; hic indicabit numerum hexapedarum uni minuto ſecundo gradus circuli terrae maximi convenientem. Sed arcus unius minuti ſecundi poteſt accipi velut recta; ergo ea portio terreſtris ſuperficiei, quae ſe extendit ad 16 hexapedas Pariſinas, pro ſuperficie plana haberi poteſt. Sed ſuperficies ſuprema immoti fluidi, quod vaſe aliquo continetur, eſt (40) portio ſphaericae ſuperficiei, Telluri concentricae; ergo ſi ſe extendat ad 16 hexapedas Pariſinas, pro ſuperficie plana habenda erit.

Scholion

43. Sive tractus immoti fluidi magnus ſit, ſive parvus, hoc eſt ſive ſuprema eius ſuperficies ſit portio ſphaericae ſuperficiei, ſive ad ſenſum plana, eadem vocatur ſemper *Libellae planum*.

(a) Traité Du Nivellement pag. 197.

Digitized by Google

PROPOSITIO X.

44. *Si ſuperficies ſuprema* BF (*Fig.* 9.) *fluidi contenti vaſe* ADEG, *ſit, horizontalis; immotum erit fluidum* BDEF.

Si fieri poteſt, hoc fluidum moveatur; ergo deſcendent aliquae eius particulae, et aliae contra ſurſum promovebuntur, uſque dum fiat in omnibus aequilibrium. Hoc autem facto, ſuperficies ſuprema fluidi ſit OC, quae (34) erit horizontalis. Atqui haec ſuperficies alteram BF ſecat in recta HI; igitur ſuperficies BF non erit amplius horizontalis, contra hypotheſim.

PROPOSITIO XI.

45. *Si immoto manente fluido, quod vaſe aliquo continetur, ſingulae eius particulae in ſuperficie ſuprema poſitae, viribus aequalibus, et ad eandem ſuperficiem normalibus comprimantur; non turbabitur eiuſdem fluidi aequilibrium.*

AEquilibrium fluidi non turbatur, niſi una particula ſupremae eius ſuperficiei alteri cedat. Sed cum ſingulae particulae eiuſdem ſuperficiei viribus aequalibus, et ad ſuperficiem normalibus (ex hyp.) comprimantur, nulla ratio eſſe poteſt, cur una cedere alteri debeat; igitur nulla ratio quoque erit, ob quam turbetur fluidi aequilibrium, atque adeo fluidum in eodem, ut ante, aequilibrii ſtatu perſeverabit.

PROPOSITIO XII.

46. *Si immoto manente fluido, quod vaſe aliquo continetur, ſingulae eius particulae in ſuperficie ſuprema poſitae, viribus ad eandem normalibus ſic premantur, ut non turbetur fluidi aequilibrium; ipſae ubique aequaliter comprimentur.*

Si particulae in ſuprema fluidi ſuperficie conſtitutae, ubique aequaliter non premuntur, augeatur preſſio minor, uſque dum omnes ubique aequaliter comprimantur, quo in caſu particulae (45) permanebunt in locis ſuis. Atqui particulae, in quibus preſſio minor erat, ante auctam preſſionem (ex hyp.) permanebant in locis ſuis; igitur additione preſſionis novae movebuntur (1) de locis ſuis. Atqui haec duo repugnant; falſo igitur ponebatur, quod particulae in ſuprema ſuperficie immoti fluidi conſtitutae, ubique aequaliter non premerentur.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIII.

47. *Si intra fluidum immotum, et contentum vaſe utcunque irregulari* ABCE (*Fig.* 10.) *concipiatur aliqua ſuperficies horizontalis* FG; *ſingulae particulae fluidi in ſuperficie hac conſtitutae, viribus aequalibus, et ad eandem normalibus comprimentur ab imminenti fluido* AFGE.

Quia (ex hyp.) immotum eſt fluidum, quo repletur vas ABCE, ſuperficies eius ſuprema AE erit (39) horizontalis. Sed ſuperficies etiam FG eſt (ex hyp.) horizontalis; igitur ſi removeas cogitatione fluidum AFGE, reſiduum FBCG adhuc (44) immotum erit. Atqui etiam reſtituto, quod cogitatione removeras, fluido AFGE, idem fluidum FBCG in eodem quietis ſtatu, uti prius, perſeverabit; conſequens ergo erit, ut ſingulae particulae in ſuperficie FG poſitae, viribus aequalibus (46), et ad eandem normalibus comprimantur ab incumbenti fluido AFGE.

PROPOSITIO XIV.

48. *Iiſdem poſitis, ſuperficies horizontalis* FG *ab incumbenti fluido* AFGE *premitur deorſum vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius baſis eſt ipſamet ſuperficies* FG, *et altitudo* AI, *ſeu diſtantia eiuſdem ſuperficiei a plano libellae* AE.

Singulae particulae ſuperficiei FG aequalem (47) omnino ſuſtinent preſſionem ab imminenti fluido AFGE. Sed una illarum I premitur (34) deorſum a pondere filamenti AI; ergo et particulae aliae omnes prementur deorſum vi, quae aequatur ponderi filamenti AI, conſequenter illarum ſumma, aut ſuperficies FG premetur deorſum vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius baſis eſt eadem ſuperficies, et altitudo AI.

COROLLARIUM

49. Sicuti ergo particula I premitur deorſum (34) a pondere filamenti AI, eidem verticaliter inſiſtentis, ita (demiſſa ex F ad planum libellae AE perpendiculari FL) particula quoque F perinde premetur deorſum velut ſi ipſi incumberet filamentum FL, alteri AI aequale.

PROPOSITIO XV.

50. *Si in vaſe* ABCE (*Fig.* 10.) *habente fundum horizontalem* BC, *altitudo immoti fluidi ſit* AK; *idem fundus deorſum premetur vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius baſis eſt ipſe fundus, et altitudo* AK, *ſeu diſtantia eiuſdem fundi a plano libellae* AE.

Quia fundus BC eſt horizontalis, infima illa fluidi ſuperficies, quae fundum exacte tegit, erit etiam horizontalis, ideoque (48) pre-

metur deorſum vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido, cuius baſis eſt ipſamet ſuperficies, et altitudo A K. Sed huiuſmodi ſuperficies eſt fundo aequalis, et vis, qua ipſa deorſum premitur, eadem eſt cum illa, qua premitur idem fundus; igitur etiam fundus premetur vi aequali ponderi columnae ex fluido, cuius baſis eſt ipſe fundus, et altitudo A K.

Corollarium I.

51. Hinc ſi in vaſe A B C E (Fig. 11. 12.) ſuperficies ſuprema ſtagnantis fluidi ſit A E, et ſuper fundum eius horizontalem B C veluti baſim excitari intelligatur columna G B C R, ex eodem fluido efformata; fundus B C premetur deorſum vi aequali ponderi columnae G B C R.

Scholion

52. Sed inquies forſan, ſi fluidum, quo repletur vas acuminatum A B C E (Fig. 12.), in fundum B C exereret preſſionem aequalem ponderi columnae fluidae G B C R; utique ille, qui vas una cum infuſo fluido ſuſtineret, nedum ſentiret pondus ipſius vaſis, verum etiam pondus columnae fluidae G B C R. Atqui revera ſentit ſolummodo pondus vaſis, et interni fluidi A B C E; igitur fundus B C vaſis non premitur vi aequali ponderi columnae G B C R. Totum hoc argumentum falſae hypotheſi eſt innixum; ſupponit enim fluidum contentum vaſe, tantummodo deorſum premere, cum tamen, (ut ex dicendis (109) conſtabit) etiam ſurſum agat in vaſis latera A B, E C, quibuscum iungitur ipſe fundus. Porrò haec vis attollens vaſis latera A B, E C, atque adeo etiam eius fundum, ſuo loco (110) oſtendetur aequalis eſſe exceſſui ponderis columnae fluidae G B C R ſupra pondus interni fluidi A B C E; ergo non eſt mirandum ſi ſentiatur ſolum pondus vaſis, et fluidi A B C E.

Corollarium II.

53. Manentibus ergo fluidi altitudine, et amplitudine fundi vaſis, eadem ſemper erit (51) preſſio in fundum, utcunque mutetur figura vaſis.

Corollarium III.

54. Unde ſi tria vaſa A D C O, E G H T, I N M P (Fig. 13. 14. 15.) mutuo aequales habeant tam horizontales fundos D C, G H, N M, quam fluidi altitudines B K, V S, S' F; fundi (51) eandem preſſionem ab incumbente fluido ſuſtinebunt.

Co-

Digitized by Google

Corollarium IV.

55. Hinc fieri poteſt, ut preſſio in fundum vaſis maior, vel minor ſit pondere totius fluidi contenti in illo. In cylindrico enim vaſe A D C O (Fig. 13.) fundus premitur vi aequali (51) ponderi totius fluidi, quo repletur; verum in aliis E G H T, I N M P (Fig. 14. 15.) preſſio in fundum minor, vel maior (51) eſt pondere totius fluidi contenti in illis.

PROPOSITIO XVI.

56. *Si ſupra immotum fluidum* A C D B *(Fig. 16.), quod continetur vaſe acuminato* H C D I, *ponatur alia eiuſdem fluidi quantitas* H A B I; *haec in fundum* C D *novam exeret preſſionem, et quidem aequalem ponderi columnae ex eodem fluido, cuius baſis aequatur eidem fundo, altitudo autem eſt diſtantia* H L *plani libellae* H I *ab alio plano* A B.

Quamdiu in vaſe erat ſola quantitas fluidi A C D B, fundus C D (51) premebatur vi aequali ponderi columnae fluidae G C D O. Atqui ſuperaddita ipſi nova alia quantitate fluidi H A B I, fundus C D (51) premitur vi aequali ponderi columnae fluidae E C D F; ergo ab addita quantitate fluidi H A B I fundus C D premetur vi aequali ponderi columnae fluidae E G O F. Sed haec columna pro baſi habet G O, fundo C D aequalem, et pro altitudine E G, vel H L; igitur preſſio in fundum C D exercita a ſuperaddito fluido H A B I, aequabitur ponderi columnae fluidae, cuius baſis aequatur fundo, et altitudo eſt H L.

Corollarium I.

57. Hinc ſi amplitudo fundi C D ſit centies, aut millies maior ſuperficie A B; ſuperaddita fluidi exigua copia H A B I tantundem gravitabit in vaſis fundum C D, quantum eiuſdem fluidi maſſa centies, aut millies maior gravitaret in eundem fundum, ſi ipſi proxime immineret.

Corollarium II.

58. Et quia (51) adiectum fluidum H A B I tantundem premit ſuperficiem A B ſtagnantis fluidi A C D B, quantum ipſam premeret columna ex eodem fluido, cuius baſis A B, et altitudo H L; utique ſi columna haec immineret ſuperficiei A B ſtagnantis fluidi A C D B, ipſa in fundum C D exereret preſſionem aequalem ponderi columnae fluidae, cuius baſis C D, et altitudo H L.

Digitized by Google

CAPUT III.

De menſura vis preſſionis, quae a particulis fluidi in aequilibrio poſiti exercetur in ſuperficiem internam vaſis, quo idem fluidum continetur.

PROPOSITIO XVII.

59. *SI ex aliquo puncto* F (*Fig.* 17. 18.) *internae ſuperficiei vaſis* AEDB *fluido pleni, demittatur ad planum libellae* AB *perpendicularis* FL; *eadem ſuperficies in illo puncto extrorſum premetur vi aequali ponderi filamenti* FL.

Particula fluidi, quae punctum F exacte tegit, premitur (48. 49) deorſum vi aequali ponderi filamenti FL. Atqui (35) exerit hanc preſſionem omnes partes verſus, et quidem aequaliter; ergo illam pariter exercebit in punctum F internae ſuperficiei vaſis AEDB, ideoque haec ſuperficies in puncto F premetur etiam extrorſum vi, quae aequatur ponderi filamenti FL.

PROPOSITIO XVIII.

60. *Vis qua extrorſum premitur ſuperficies interna vaſis in puncto* F, *perpendiculariter in hanc agit.*

Si fieri poteſt, ſuperficies in puncto F prematur extrorſum vi FH, exponente (59) pondus filamenti FL, et oblique agenti in ſuperficiem. Tum ducto plano tangente TM, et ad hoc demiſſa perpendiculari HG, compleatur rectangulum HGFI. Quoniam ſuperficies in puncto F extrorſum premitur vi, et directione FH, eadem premetur quoque duabus viribus FG, FI, quae aequivalent vi FH. Sed vis FG, utpote agens ſecundum directionem tangentis plani TM, efficaciam nullam habet ad premendam extrorſum ſuperficiem in puncto F; ergo ipſam extrorſum premet ſolum altera vis FI perpendicularis ad idem planum, ſive ad ſuperficiem. Sed vis FI minor eſt vi FH; igitur ſuperficies in puncto F non amplius extrorſum premitur vi FH, exponente pondus filamenti FL, contra hypotheſim.

COROLLARIUM.

61. Ergo vis perpendicularis exercita a fluido in punctum F internae ſuperficiei vaſis, quo continetur, omnino aequatur ponderi filamenti FL.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XIX.

62. Sit AHP (*Fig.* 19.) *ſectio verticalis vaſis, libella autem in eo contenti fluidi, ſit* AP, *et ſumpta ejus parte infinite parva* CD, *ex puncto* C *demittatur ad planum libellae* AP *perpendicularis* CI. *Dico, quod preſſio perpendicularis a fluido exercita in partem infinite parvam* CD, *aequabitur facto ex eadem parte* CD *in pondus filamenti* CI.

Ex puncto D ad planum libellae AP demiſſa intelligatur perpendicularis DL. Preſſio perpendicularis a fluido exercita in punctum C, aequatur (61) ponderi filamenti CI, exercita autem in punctum D, aequatur ponderi filamenti DL. Atqui ob puncta C et D infinite propinqua, filamenta CI, DL quamproxime ſunt aequalia; igitur preſſio perpendicularis a fluido exercita in punctum D, eadem quamproxime erit cum illa, quae exercetur in punctum C, hoc eſt aequalis ponderi filamenti CI. Eandem ob cauſam, etiam preſſio perpendicularis exercita in quodvis aliud intermedium rectae CD punctum, erit aequalis ponderi filamenti CI; igitur tota preſſio perpendicularis exercita in rectam CD, aequabitur ponderi filamenti CI toties ſumpto, quot puncta ſunt in recta CD, ſive aequabitur facto ex recta CD ducta in pondus filamenti CI.

SCHOLION.

63. Quia haec demonſtratio, ut patet, etiam habet locum, ſi CD non ut recta, ſed ut ſuperficies infinite parva conſideretur; utique etiam preſſio perpendicularis a fluido exercita in partem infinite parvam ſuperficiei vaſis, aequabitur facto ex eadem parte in pondus filamenti CI, ſive aequabitur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus baſis eſt eadem pars CD, et altitudo CI.

PROPOSITIO XX.

64. *Preſſio perpendicularis exercita a fluido in partem infinite parvam ſuperficiei vaſis* AHP (*Fig.* 19.), *exponi poteſt per factum ex eadem parte in ejus diſtantiam a plano libellae* AP.

Sumptis in ſuperficie AHP duabus partibus CD, EF infinite parvis, et inaequalibus inter ſe, demittantur ad planum libellae AP perpendiculares CI, EN. Preſſio perpendicularis exercita a fluido in partem CD, erit ad illam, quae exercetur in partem EF (63), ut factum ex CD in pondus filamenti CI ad factum ex EF in pon-

 dus

dus filamenti EN, ſive in ratione compoſita partis CD ad partem EF, et ponderis filamenti CI ad pondus filamenti EN. Sed pondus filamenti CI eſt (20) ad pondus filamenti EN, ut CI ad EN; ergo etiam preſſio perpendicularis exercita a fluido in partem CD, erit ad illam, quae exeritur in partem aliam EF in ratione compoſita partis CD ad partem EF, et CI ad EN, ſive ut factum ex parte CD in CI ad factum ex parte EF in EN. Quare preſſio perpendicularis exercita a fluido in partem CD, exponi poteſt per factum ex eadem parte CD in CI, exercita vero in partem EF, per factum ex eadem parte EF in EN.

LEMMA

65. *Sint pondera* A, B, C (*Fig.* 20.) *ſita ad eandem partem plani verticalis, cujus ſectio horizontalis eſt recta* DF, *inque ipſum e ſingulis ponderibus demittantur perpendiculares* AD, BE, CF. *Sit autem punctum* G *centrum gravitatis ponderum omnium* A, B, C, *a quo ducatur perpendicularis* GH *in idem planum. Dico, ſummam factorum, quae fiunt a ſingulis ponderibus in ſuas perpendiculares, aequari facto ex ſumma ponderum* A, B, C *in rectam* GH.

Singulae perpendiculares AD, BE, CF intelligantur produci ad alteram partem plani DF, ſintque ſingulae DK, EI, FM ipſi GH aequales, omneſque inflexiles virgas referant, parallelas ad horizontem. Denique ad puncta K, I, M talia pondera applicentur, ut ſingula cum ſibi oppoſitis A, B, C aequilibrium ſervent ad interſectionem plani DF; unde omnia pondera K, I, M aequiponderabunt omnibus A, B, C. Cum ergo pondera A et K circa D aequilibrentur, erit pondus A ad pondus K, ut DK ad DA, et ideo factum ex A in AD aequabitur facto ex K in KD, vel ex K in GH. Pari modo oſtendam, factum ex B in BE aequari facto ex I in IE, vel ex I in GH, et factum ex C in CF facto ex M in MF, vel ex M in GH. Ergo ſumma factorum ex A in AD, ex B in BE, et ex C in CF aequabitur facto ex omnibus K, I, M in GH. Cum autem K, I, M aequiponderent ipſis A, B, C, etiam eiſdem A, B, C ex eorum centro G gravitatis ſuſpenſis aequiponderabunt; unde cum diſtantia GH centri gravitatis G a plano DF, ſit aequalis ſingulis DK, EI, FM, neceſſe eſt pondera A, B, C ſimul ſumpta aequari ipſis K, I, M pariter ſimul ſumptis. Sed (ex demonſtr.) ſumma factorum ex A in AD, ex B in BE, et ex C in CF aequatur facto ex omnibus K, I, M in GH; ergo et ſumma factorum ex A in AD, ex B in BE, et ex C in CF aequabitur facto ex omnibus A, B, C in GH.

Scho-

Digitized by Google

SCHOLION.

66. Quamvis in hac demonſtratione poſitae ſint rectae A K, B I, C M parallelae ad horizontem, et planum, cuius ſectio D F, perpendiculare ad horizontem; nihilominus patet, ſi rectae A K, B I, C M transferantur in ſitum perpendicularem ad horizontem, et planum, cuius ſectio eſt B F, in ſitum horizontalem, eandem factorum manere aequalitatem, cum rectae omnes ſint eaedem, quae prius.

PROPOSITIO XXI.

67. *Preſſio perpendicularis a fluido exercita in finitam partem ſuperficiei vaſis, quo continetur, exponi poteſt per factum ex eadem finita parte in diſtantiam ejus centri gravitatis a libellae plano.*

Sit A H P (Fig. 19.) ſectio verticalis vaſis, libella autem in eo contenti fluidi ſit A P. Tum ſumpta qualibet eius parte finita C H, centrum gravitatis habente in puncto G, eadem diviſa concipiatur in partes infinite parvas C D, D E, E F, &c. Denique ex punctis C, D, E, F, &c. demittantur ad planum libellae A P perpendiculares C I, D L, E N, F M etc.) et ex centro gravitatis G ad idem planum ducatur perpendicularis G O. Preſſiones perpendiculares a fluido exercitae in partes infinite parvas C D, D E, E F, &c. exponuntur (64) per facta ex C D in C I, ex D E in D L, ex E F in E N, &c. Igitur tota preſſio perpendicularis exercita in partem finitam C H, per omnium horum factorum ſummam exponi poteſt. Sed ſi partes infinite parvae C D, D E, E F, &c. conſiderentur velut ponduſcula appenſa rigidis rectis C I, D L, E N, &c. et habentia commune centrum gravitatis in puncto G, ſumma factorum ex C D in C I, ex D E in D L, ex E F in E N, &c. aequabitur (66) facto ex omnibus C D, D E, E F, &c. in rectam G O, ſeu facto ex parte finita C H in G O; igitur etiam preſſio perpendicularis a fluido exercita in partem finitam C H, exponetur per factum ex eadem parte in G O. Patet autem hoc ipſum etiam ſuccedere, ſi C H non conſideretur ut pars finita ſectionis A H P, ſed ut pars finita ſuperficiei vaſis, quo fluidum continetur; ergo preſſio perpendicularis a fluido exercita in partem finitam C H ſuperficiei vaſis, quo continetur, exponetur per factum ex eadem finita parte in diſtantiam ejus centri gravitatis a plano libellae A P.

COROLLARIUM I.

68. Quia plana pariter ſuperficies fundi horizontalis H D (Fig. 21.) ſpectari poteſt ut pars finita ſuperficiei internae vaſis A H D P;

etiam

etiam preſſio perpendicularis in fundum HD exercita a fluido AHDP, exponetur (67) per factum ex eodem fundo in diſtantiam ejus centri gravitatis a plano libellae AP.

Corollarium II.

69. Cum vero centrum gravitatis fundi HD ſit in ejus medio puncto R; utique demiſſa ex R ad planum libellae AP perpendiculari RB, preſſio perpendicularis a fluido exercita in fundum HD, exponetur per factum ex eodem fundo HD in RB.

PROPOSITIO XXII.

70. *Preſſio perpendicularis exercita a fluido in partem finitam* CH (*Fig.* 21.) *ſuperficiei vaſis* AHDP, *aequatur ponderi ejuſdem fluidi contenti in priſmate recto, habente baſim aequalem eidem finitae parti* CH, *et altitudinem* GO, *ſeu diſtantiam centri gravitatis* G *ejuſdem partis a plano libellae* AP.

Preſſio perpendicularis a fluido exercita in fundum HD, eſt (69. 67.) ad illam, quae exeritur in ſuperficiem CH, ut factum ex fundo HD in RB ad factum ex ſuperficie CH in GO, ſive ut priſma rectum, cujus baſis eſt fundus HD, et altitudo RB, ad alterum rectum priſma, habens pro baſi CH, et pro altitudine GO, ſive (20) ut pondus fluidi contenti in primo priſmate, ad pondus ejuſdem fluidi, quod in altero continetur. Sed preſſio perpendicularis in fundum HD exercita, eſt (50) aequalis ponderi illius fluidi, quod continet primum priſma; ergo et preſſio perpendicularis exercita in ſuperficiem CH, aequabitur ponderi illius fluidi, quod in altero priſmate continetur.

Corollarium.

71. Quoniam Valva, aut tabula cataractae ſpectari poteſt ut pars finita ſuperficiei internae vaſis, aut receptaculi, quo ſtagnans fluidum continetur; preſſio perpendicularis in ipſam exercita, aequalis erit (70) ponderi ejuſdem fluidi contenti in priſmate recto, cujus baſis eſt valva ipſa, et altitudo eſt diſtantia ejus centri gravitatis a ſuprema fluidi ſuperficie. Menſura autem hujus preſſionis invenietur ſequenti modo. Quadratum ABED (Fig. 22.) referat verticalem valvam, ſeu tabulam cataractae, quae lateraliter comprimatur ab aqua ſtagnante M, ſuperficiem ſupremam habente in horizontali plano ABHG. Sit praeterea valvae, et aquae altitudo AD pedum 6. Ex ejus medio puncto C, ſive ex gravitatis centro ejuſdem agatur CL perpendicularis ad communem ſectionem AB plani ABED cum plano ABHG, quae perpendicularis etiam erit

eidem

Digitized by Google

eidem plano A B H G. Preſſio perpendicularis exercita ab aqua ſtagnante in valvam, aequatur (70) ponderi ejuſdem aquae contentae in priſmate recto, cujus baſis eſt valva ipſa, et altitudo C L. Sed valva eſt pedum quadratorum 36, et C L eſt pedum 3; ergo idem priſma 108 pedes aquae cubicos continebit. Sed pes cubicus aquae eſt 70 librarum Pariſienſium; igitur idem priſma ponderabit 7560 libras, ideoque totidem libris aequivalebit preſſio perpendicularis ab aqua exercita in valvam A B E D.

PROPOSITIO XXIII.

71. *Si vas, aut receptaculum fluido ſtagnante plenum, habeat formam cubi; preſſio a fluido exercita in quatuor quadrata ſimul, a quibus cubus lateraliter terminatur, dupla illius erit, quae exercetur in ejus fundum.*

Finge A B E D (Fig. 22.) eſſe unum ex quatuor his quadratis, et ex ejus centro gravitatis C duc ipſi A D parallelam C L, quae erit dimidia rectae A D, ſimulque (71) normalis ad libellae planum A B H G. Preſſio a fluido exercita in quadratum A B E D, aequatur (71) ponderi ejuſdem fluidi contenti in priſmate recto, cujus baſis eſt quadratum A B E D, et altitudo C L. Sed preſſio exercita in fundum vaſis, aequatur (51) ponderi ejuſdem fluidi contenti in priſmate recto, cujus baſis eſt ipſe fundus, et altitudo A D; igitur preſsio exercita in quadratum A B E D, erit ad illam, quae exercetur in fundum vaſis, ut pondus primi priſmatis ad pondus alterius, ſive ut primum priſma ad alterum, aut (ob aequales eorum baſes) ut altitudo C L ad altitudinem A D. Eſt vero C L dimidia ipſius A D; ergo et preſsio exercita in quadratum A B E D, erit dimidia illius, quae exercetur in fundum vaſis. Idem autem oſtendi poteſt in reliquis tribus quadratis, quae lateraliter ambiunt ipſum cubum; igitur preſſio exercita a fluido in quatuor quadrata ſimul, quibus eſt cubus lateraliter terminatus, aequalis erit quatuor medietatibus illius preſſionis, quae exercetur in fundum, hoc eſt dupla ejuſdem erit.

PROPOSITIO XXIV.

72. *Si fluidum* G A B O D E (*Fig.* 23.) *inditum tubis communicantibus* P R, Q O *inaequalium diametrorum, ſit immotum; ſupremae ejus ſuperficies* A G, E D *erunt in eodem plano horizontali* A D.

Intermedius tubus B R F O ſectus intelligatur verticali plano M N, cujus centrum gravitatis poſitum ſit in C. Traducto dein per pun-

punctum C horizontali plano I L, in hoc cadant ex H et K perpendiculares H I, K L, quae erunt diſtantiae centri gravitatis C plani M N a ſuperficiebus A G, E D. Quoniam planum M N ſpectari poteſt ut latus vaſis V P B N M, ipſum a fluido G A B N M urgebitur (70) verſus L vi, quae aequatur ponderi columnae ex fluido, cujus baſis M N, et altitudo H I. Eandem ob cauſam, idem planum M N a fluido E D O N M urgebitur verſus I vi, quae aequatur ponderi columnae ex fluido, habentis M N pro baſi, et pro altitudine K L. Atqui, cum totum fluidum contentum tubis (ex hyp.) ſit immotum, etiam immotum erit planum M N ab hiſce contrariis viribus ſollicitatum; ergo pondus columnae ex fluido, habentis M N pro baſi, et pro altitudine H I, aequabitur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus baſis M N, et altitudo K L. Hae autem duae columnae aequales habent eandem baſim M N; ergo pariter aequabuntur earum altitudines H I, K L, ideoque ſuperficies A G, E D aequidiſtabunt a plano horizontali I L, ipſaeque propterea etiam erunt in eodem plano horizontali A D.

PROPOSITIO XXV.

74. *Si fluidum* G A B O D E (*Fig.* 23.) *inditum tubis communicantibus* P R, Q O, *ſupremas habeat ſuperficies* A G, E D *poſitas in eodem plano horizontali* A D; *ipſum immotum erit.*

Cum ſuperficies A G, E D ſint (ex hyp.) in eodem plano horizontali A D; etiam aequales erunt H I, K L, unde columna ex fluido, habens pro baſi M N, et pro altitudine H I, aequabitur columnae ex eodem fluido, cuius baſis M N, et altitudo K L, et pondus primae ponderi alterius aequale erit. Sed (70) planum M N urgetur verſus L vi aequali ponderi columnae ex fluido, cuius baſis M N, et altitudo H I, rurſuſque verſus I ſollicitatur vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cuius baſis M N, et altitudo K L; ergo planum M N viribus aequalibus, et directe oppoſitis ſollicitatum, quieſcet, conſequenter etiam fluidum contentum tubis, immotum erit.

PROPOSITIO XXVI.

75. *Fluidum* V P B O T Q (*Fig.* 23.) *immotum, et contentum tubis communicantibus* P R, Q O, *ſecari intelligatur horizontali plano* A D, *ut ita in utroque tubo prodeant ſuperficies horizontales* A G, E D. *Dico illarum quamlibet, ut* E D, *tanta vi ſurſum ſollicitari a fluido* V P A G, *quantum eſt pondus columnae ex eodem fluido, cujus baſis eſt ipſamet ſuperficies* E D, *altitudo autem aequatur altitudini* A P *columnae* V P A G.

Cum

Cum immotum ſit (ex hyp.) fluidum VPBOTQ, ejus ſuperficies ſupremae PV, QT in eodem erunt (73) plano horizontali PT. Sed ſuperficies etiam AG, ED ſunt (ex hyp.) in eodem plano horizontali AD; ergo ſi ex quolibet puncto S plani QT demittatur ad ſuperficiem ED perpendicularis SK, haec erit ipſi AP aequalis. Hoc autem poſito, ita oſtenditur propoſitio. Cum ſuperficies AG, ED ſint in eodem plano horizontali AD; utique ſi ab immoto fluido VPBOTQ demas ex una parte fluidum VPAG, et ex altera fluidum TQED, reliquum GABODE adhuc immotum (44) erit. Sed ſi dein reſtituas tubo PR ablatum fluidum VPAG, & tubo QO ſubtractum alterum TQED, idem fluidum GABODE in eodem quietis ſtatu, in quo prius erat, perſeverabit; ergo fluidum VPAG aequilibrabitur cum altero TQED, ideoque ſuperficies ED tanta vi ſurſum ſollicitabitur a fluido VPAG, quanta deorſum urgetur ab imminenti fluido TQED. Atqui ſuperficies ED (48) urgetur deorſum ab incumbente fluido TQED vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus baſis ED, & altitudo SK; ergo et ſurſum ſollicitatibur a fluido VPAG vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus baſis ED, et altitudo SK, aut PA.

Corollarium.

76. Hinc ſi manente altitudine PA fluidi contenti in tubo PR, auferas ex alio tubo QO fluidum TQED; ſuperficies ED reſidui fluidi DEFO ſurſum (75) moveri incipiet vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido, cujus baſis ED, et altitudo PA. Et ſi haec ſuperficies immobili operculo obducta eſſet, hoc etiam ſurſum urgebitur vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido, cujus baſis eſt operculum ipſum ED, et altitudo PA.

Scholion.

77. Chriſtianus Wolſius ex hoc principio ſuum tubum anatomicum derivavit. Idem enim imprimis ex lamina ferrea ſtamno obducta, conſtruendum curavit vas cylindricum FDEG (Fig. 48.), eidemque afferruminari juſſit inflexum tubulum MILBCN. Dein veſicam, aut pellem, aut alias quaſcunque partes membranaceas animalium baſi ſuperiori FD ſuperinduxit. Denique tantum aquae immiſit in vas cylindricum FDEG, ut ipſa, eo repleto, aſſurgeret intra tubulum uſque ad H. Quo facto, non ſolum vidit membranaceas illas partes hemiſphaerii figuram acquiſiviſſe, verum etiam obſervavit aquae particulas invadentes earum poros, ita diſtincte diviſiſſe omnia illarum vaſa, ut haec, levi facta inciſione, ſolis digitis accuratius quam cultro anatomico ſepararentur.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXVII.

78. *Si duo fluida* V P A G, I K O B A G (*fig.* 49.) *diverſis prae- dita denſitatibus, et incluſa tubis communicantibus* P R, Q O, *ſint immota; producto uſque ad* D *horizontali plano* A G, *in quo fluida haec junguntur, gravitas ſpecifica levioris fluidi* V P A G *erit ad illam gravioris* I K D E, *ut hujus altitudo* I E *ad illius altitudinem* P A.

Quoniam ſuperficies A G, E D ſunt (ex hyp.) in eodem plano horizontali A D, utique ſi in tubis eſſet ſolum fluidum E D O B A G, hoc (74) prorſus immotum foret. Atqui ejus ſuperficies A G, E D premuntur deorſum a fluidis V P A G, I K D E, hiſque preſſionibus non obſtantibus, adhuc hoc fluidum (ex hyp.) eſt immotum; ergo ſuperficies ejus E D tanta vi ſurſum propellitur a leviori fluido V P A G, quanta deorſum urgetur a graviori I K D E. Sed ſuperficies E D deorſum (48) urgetur a graviori fluido I K D E vi, quae aequatur ponderi columnae ex fluido graviori, cujus baſis E D, et altitudo I E, e contra vero ſurſum (75) ſollicitatur a leviori fluido V P A G vi, quae aequatur ponderi columnae ex eodem fluido leviori, cujus baſis E D, et altitudo P A; ergo harum duarum columnarum pondera aequabuntur, ideoque gravitas ſpecifica levioris fluidi V P A G erit (27) ad illam gravioris I K D E, ut columna ex fluido graviori, cujus baſis E D, et altitudo I E, ad columnam ex fluido leviori, cujus baſis E D, et altitudo P A. Verum cum hae columnae communem habeant baſim E D, ſunt inter ſe ut altitudines I E, P A; ergo et gravitas ſpecifica fluidi V P A G erit ad ſpecificam gravitatem fluidi I K D E, ut I E ad P A.

CAPUT IV.

De menſura vis verticalis, quae ſurſum a fluido exercetur in latera vaſorum, et in inferiorem ſuperficiem ſolidi eidem immerſi.

DEFINITIO XI.

79. SI trapezium A C D B (Fig. 24.) utcunque inclinatum ad horizontem, oppoſita habeat latera A B, C D parallela ad horizontem, atque adeo etiam inter ſe: tum per C D traducto plano verticali C F E D, ad hoc ex ſingulis trapezii punctis perpendiculares lineae demittantur; figura F C D E inde orta, vocatur projectio trapezii in verticali plano C F E D.

Scho-

Digitized by Google

Scholion.

80. Eadem ratione figura FEBA erit projectio trapezii ACDB in plano horizontali, quod traducitur per AB, et figura F'E'B'A' erit projectio ejuſdem in plano horizontali TV.

Lemma I.

81. *Si ex quolibet puncto* O (*Fig.* 24.) *trapezii* ACDB *agantur* OS, OQ, *quarum prima ſit recta plano* FCDE, *altera autem recta plano* ACDB: *tum plano per illas ducto, ſecetur priſma* FEBACD; *ſectio inde genita* RLM, *recta erit utrique plano.*

Quoniam eſt OQ (ex hyp.) recta plano ACDB; planum per illam tranſiens, rectum erit plano ACDB. Sed planum traductum per rectas OS, OQ, tranſit etiam per OQ; ergo pariter rectum erit plano ACDB. Sed ſectio RLM eſt in plano traducto per rectas OS, OQ; igitur ſectio RLM erit quoque recta plano ACDB. Pari modo oſtendam, eandem ſectionem RLM etiam rectam eſſe plano alteri FCDE; ergo eadem erit recta utrique plano.

Lemma II.

82. *Si duo plana* ABCD, EFHG (*Fig.* 25.) *ſint recta eidem plano* BFCH; *etiam communis eorum ſectio* LM *erit recta eidem plano.*

Recta LM, ſi fieri poteſt, non ſit recta plano BFCH; ergo obliqua erit ad communes ſectiones BC, FH planorum ABCD, EFHG cum plano BFCH. Nunc in planis ABCD, EFHG demittantur ex puncto L ad communes ſectiones BC, FH perpendiculares LN, LO. Quia planum ABCD rectum eſt plano BFCH, utique recta LN perpendiculariter ducta ad communem interſectionem BC, perpendicularis quoque erit ad planum BFCH. Simili modo oſtendam, etiam LO, perpendicularem eſſe eidem plano BFCH; ergo ex puncto L ſumpto extra planum BFCH, duae ad hoc planum demitti poterunt perpendiculares LN, LO, quod eſt abſurdum. Falſo itaque ponebatur LM non eſſe rectam plano BFCH.

Corollarium I.

83. Hinc CD (Fig. 24.), quae communis eſt Sectio planorum FCDE, ACDB, recta erit plano trianguli RLM. Nam cum

 duo

duo plana FCDE, ACDB ſint (81) recta plano trianguli RLM, utique eorum communis ſectio CD erit (82) recta eidem plano.

Corollarium II.

84. Itaque rectus erit tam angulus CML, quam angulus CMR; et ideo binae rectae LM, RM perpendiculares erunt ad eandem rectam CD.

Corollarium III.

85. Unde erit RL perpendicularis ad duas rectas EF, LM. Nam planum horizontale FEBA rectum eſt verticali FCDE. Sed huic quoque eſt (81) rectum planum RLM; igitur plana FEBA, RLM recta erunt eidem plano FCDE, et propterea ſectio illorum RL erit (82) recta plano FCDE, atque ita etiam perpendicularis ad duas rectas EF, LM.

L E M M A III.

86. *Si altitudo trapezii* ACDB (*Fig.* 26.) *habentis oppoſita latera* AB, CD *invicem parallela, ſit infinite parva reſpectu laterum eorundem; haec latera poterunt pro aequalibus uſurpari*

Productis CA, DB donec conveniant ad punctum E, ex hoc demittatur ad latus CD perpendicularis EM, quae occurrens reliquo lateri AB in R, determinabit altitudinem RM trapezii ACDB. Cum ergo altitudo RM trapezii ACDB ſit (ex hyp.) infinite parva relate ad latera AB, CD, utique ejus area erit infinite parva relate ad aream trianguli CED. Unde erit RM infinite parva reſpectu EM, et ideo rectae ER, EM pro aequalibus ſumi poterunt. Sed quia in triangulo CEM eſt AR parallela ad CM, erit AR ad CM, ut ER ad EM; igitur etiam rectae AR, CM poterunt accipi ut aequales. Simili modo oſtendam, etiam rectas RB, MD poſſe accipi ut aequales; igitur latera AB, CD pro aequalibus ſumi poterunt.

L E M M A IV.

87. *Si parallela latera* AB, CD *trapezii* ACDB (*Fig.* 24.) *infinite proxima ſupponantur, ita ut trapezii altitudo ſit infinite parva reſpectu laterum eorundem; area* ACDB *erit ad aream* FCDE, *ut* RM *ad* LM, *et eadem area* ACDB *erit ad aream* FEBA, *ut* RM *ad* RL.

1. Quia altitudo trapezii ACDB eſt (ex hyp.) infinite parva relate ad ejus latera AB, CD; haec (86) quamproxime aequabun-

tur

Digitized by Google

tur, et ideo ſemiſumma laterum AB, CD erit uni CD aequalis. Sed quia RM eſt (84) perpendicularis ad CD, area trapezii ACDB aequatur facto ex altitudine RM in ſemiſummam laterum AB, CD; ergo aequabitur etiam facto ex RM in CD. Rurſus cum ſint parallelae tam verticales rectae FC, ED, quam horizontales FE, CD; parallelogrammum erit FCDE, atque ita FE ipſi CD aequalis. Eſt autem LM (84) perpendicularis ad CD; ergo area FCDE aequabitur facto ex LM in CD, ac per conſequens area ACDB erit ad aream FCDE, ut factum ex RM in CD ad factum ex LM in CD, ſive ut RM ad LM.

2. Recta FE eſt (num. 1.) parallela, et aequalis ipſi CD. Sed etiam AB eſt (ex hyp.) parallela, et (86) quamproxime aequalis ipſi CD; ergo etiam FE erit parallela, et quamproxime aequalis ipſi AB, ideoque ſemiſumma laterum FE, AB trapezii FEBA aequabitur ipſi FE, vel CD. Sed quia RL perpendicularis eſt (85) ad FE, area trapezii FEBA aequatur facto ex altitudine RL in ſemiſummam laterum FE, AB; ergo aequabitur etiam facto ex RL in CD, ideoque area trapezii ACDB erit ad aream trapezii FEBA, ut factum ex RM in CD ad factum ex RL in CD, ſive ut RM ad RL.

PROPOSITIO XXVIII.

88. *Iiſdem poſitis, ſi trapezium* ACDB *ita immoto fluido ſit immerſum, ut ejus centrum gravitatis* O *diſtet a plano libellae* TV *intervallo* OG; *idem duabus viribus comprimetur, verticali ſcilicet ſurſum, et horizontali, quarum prima expoſita erit per factum ex area* FEBA *in* OG, *altera autem per factum ex area* FCDE *in* OG.

I. Preſſio perpendicularis exercita a fluido in trapezium ACDB, ſit expoſita per OI, ductaque in plano producto trianguli RLM recta OS horizontali, in hanc cadat ex puncto I perpendicularis IN, et compleatur rectangulum ONIP. Quoniam hoc rectangulum eſt parallelogrammum, cujus diagonalis OI, preſſio perpendicularis, aut vis OI reſolvetur in duas ON, OP, quarum prima agit horizontaliter in trapezium, altera autem ipſum verticaliter ſurſum urget; ideoque preſſio perpendicularis erit ad verticalem, ut OI ad OP; erit vero ad horizontalem, ut OI ad ON. His autem poſitis, ita oſtenditur propoſitio. Cum rectus angulus PON aequetur recto alteri IOR, ablato utrinque angulo ION, reliquus angulus POI aequabitur reliquo RON. Verum ob parallelas LR, ON, alternus angulus LRM aequatur alterno RON; ergo et angulus POI aequabitur angulo LRM. Sed rectus etiam angu-

Digitized by Google

ſus O P I aequatur (85) recto R L M; ergo triangulum P O I erit ſimile L M R, et vis perpendicularis O I erit ad verticalem O P, ut R M ad R L. Eſt autem (87) R M ad R L, ut area A C D B ad aream F E B A, vel ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F E B A in O G; ergo et vis perpendicularis O I erit ad verticalem O P, ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F E B A in O G. Sed vis perpendicularis O I exponitur (67) per factum ex area A C D B in O G; ergo et vis verticalis O P exponetur per factum ex area F E B A in O G.

II. Quia triangulum P O I oſtenſum eſt ſimile L M R, vis perpendicularis O I erit ad vim horizontalem O N, vel P I, ut R M ad L M, ſive (87) ut area A C D B ad aream F C D E, ſive ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F C D E in O G. Sed vis perpendicularis O I exponitur (67) per factum ex area A C D B in O G; ergo et vis horizontalis N O exponetur per factum ex area F C D E in O G.

Corollarium.

89. Quia area F′E′B′A′ aequatur alteri F E B A; vis verticalis O P exponetur etiam per factum ex area F′E′B′A′ in O G.

PROPOSITIO XXIX.

90. *Iiſdem poſitis, vis verticalis, qua trapezium* A C D B *a fluido ſurſum ſollicitatur, aequalis eſt ponderi ejuſdem fluidi contenti in priſmate truncato* F′E′B′A′A B D C.

Vis perpendicularis O I, qua trapezium premitur a fluido, eſt (88. 89.) ad vim verticalem O P, qua ab eodem ſurſum ſollicitatur, ut factum ex area A C D B in O G ad factum ex area F′E′B′A′ in O G, ſive ut priſma rectum, cuius baſis A C D B, et altitudo O G, ad alterum priſma rectum, cuius baſis F′E′B′A′, et altitudo O G. Sed primum priſma eſt (20) ad alterum, ut pondus fluidi in eo contenti, ad pundus eiuſdem fluidi, quod in altero continetur; ergo et vis perpendicularis O I erit ad verticalem vim O P, ut pondus fluidi contenti in priſmate recto, cuius baſis ACDB, et altitudo O G, ad pondus eiuſdem fluidi, quod continetur in priſmate recto, habente baſim F′E′B′A′, et altitudinem O G. Sed vis perpendicularis O I aequatur (70) ponderi fluidi contenti in priſmate recto, cuius baſis A C D B, et altitudo O G; ergo et vis verticalis O P aequabitur ponderi eiuſdem fluidi, quod continetur in priſmate recto, habente baſim F′E′B′A′, et altitudinem O G. Sed quia trapezii latera A B, C D infinite proxima ſupponuntur, priſma truncatum F′E′B′A′A B D C quamproxime eſt aequale priſ-

mati

Digitized by Google

mati recto, habenti baſim F′E′B′A′, et altitudinem OG; ergo etiam vis verticalis OP aequabitur ponderi eiuſdem fluidi, quod continetur in priſmate truncato F′E′B′A′ABDC.

Corollarium.

91. Vis itaque verticalis, qua fluidum ſurſum urget trapezium ACDB, aequatur ponderi eiuſdem fluidi, quod continetur in priſmate truncato, cuius baſis inclinata eſt trapezium idem, baſis autem horizontalis eſt eiuſdem trapezii proiecto F′E′B′A′ in plano libellae TV.

PROPOSITIO XXX.

92. *Solidum* ABED (*Fig.* 27.), *cuius maxima horizontalis ſectio eſt* ACEI, *immerſum ſit fluido habenti libellam in plano* LK. *Tum ex punctis omnibus ſuperficiei inferioris* ADE *perpendiculares lineae demittantur ad planum libellae* LK, *ita ut fiat ejus projectio* FG *in eodem plano. Dico vim verticalem, qua ſurſum a fluido urgetur ſuperficies eius inferior* ADE, *aequalem eſſe ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie* ADE, *ab eius projectione* FG *in plano libellae* LK, *et a ſuperficie cylindrica* FAEG.

Solidi pars inferior ADE diviſa concipiatur in ſtrata horizontalia altitudinis infinite parvae, et multitudine infinita, quorum unum ſit MNOPQR mnopqr (Fig. 28.). Tum perimetris horirizontalium baſium huius ſtrati in eundem numerum aequalium partium ſectis, iungantur verticales rectae Mm, Nn, Oo, Pp, Qq, Rr, quae ſingulae erunt inclinatae ad horizontem, et ſuperficiem ſtrati divident in trapezia, quorum duo oppoſita latera, veluti MN, mn, erunt infinite propinqua, et parallela. His poſitis, vis verticalis, qua a fluido urgetur ſurſum quodvis ex his trapeziis, aequatur (91) ponderi eiuſdem fluidi contenti in priſmate truncato, quod pro baſe inclinata habet idem trapezium, pro baſe autem horizontali projectionem trapezii in plano LK (Fig. 27.). Igitur ſumma omnium virium verticalium, ſive vis verticalis aequipollens eorum ſummae, aequabitur aggregato omnium ponderum eiuſdem fluidi contenti in omnibus truncatis priſmatibus, quorum baſes inclinatae ſunt trapezia ſingula eiuſdem ſtrati, baſes autem horizontales ſunt projectiones eorum in plano LK. Id autem convenit etiam aliis ſtratis horizontalibus, in quae diviſa eſt ſolidi pars inferior ADE; ergo vis verticalis, qua ſolidi ſuperficies inferior ADE ſurſum a fluido ſollicitatur, aequalis erit ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie ADE, ab eius projectione FG, et a ſuperficie cylindrica FAEG.

Scho-

Scholion.

93. Si eodem modo, quo ſolidi pars inferior ADE in ſtrata horizontalia diviſa fuit, etiam dividi concipiatur ſuperior altera ABE; ſimili ratiocinio demonſtrabitur, vim verticalem, qua haec pars deorſum a ſuperiori fluido ſollicitabitur, aequalem eſſe ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie ABE, ab eius projectione in plano libellae LK, et a ſuperficie cylindrica FAEG.

Corollarium I.

94. Si fluidi libella LK (Fig. 29.) ſit in plano ſectionis maximae ACEI, hoc eſt ſi fluido immergatur ſola pars ADE ſolidi ABED; vis verticalis, qua ſuperficies ADE a fluido ſurſum ſollicitatur, aequabitur (92) ponderi eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine partis immerſae ADE.

Corollarium II.

95. Et ſi fluidi libella LK (Fig. 30.) fuerit infra planum ſectionis maximae ACEI, ſive ſi fluido ſit immerſa ſola pars GDF ſolidi ABED; vis verticalis, qua ſuperficies GDF ſurſum a fluido ſollicitatur, aequabitur (92) ponderi eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine partis immerſae GDF.

Propositio XXXI.

96. *Si totum ſolidum* ABED (*Fig.* 27.), *cuius maxima horizontalis ſectio eſt* ACEI, *immerſum ſit fluido habenti libellam in plano* LK; *differentia virium verticalium ſurſum, et deorſum agentium in inferiorem, et ſuperiorem partem eius ſuperficiei, aequabitur ponderi eiuſdem fluidi, quod ſub toto eius volumine contineretur.*

Vis verticalis, qua ſuperficies ſuperior ABE deorſum a fluido ſollicitatur, aequalis eſt (93) ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie ABE, ab eius projectione FG in plano LK, et a ſuperficie cylindrica FAEG. Contra autem vis verticalis, qua ſuperficies inferior ADE a fluido urgetur ſurſum, aequatur (92) ponderi fluidi comprehenſi a ſuperficie ADE ab eius projectione FG in plano LK, et a ſuperficie cylindrica FAEG. Sed hae duae vires, utpote verticales, ſunt directe oppoſitae inter ſe; ergo ſi prima ab altera ſubducatur, prodibit differentia earundem, quae proinde aequalis erit ponderi illius fluidi, quod contineretur ſub volumine ſolidi ABED.

Scho-

Scholion.

97. Haec verticalium virium differentia *vis attollens ſolidum* appellatur, quae proinde aequabitur ponderi illius fluidi, quod contineretur ſub volumine ſolidi ABED.

Corollarium I.

98. Hinc ſolidum, quod totum fluido eſt immerſum, tantum ponderis ſui amittet, quantum eſt pondus eiuſdem fluidi, quod ſub eius volumine contineretur. Tantam enim amittet ponderis ſui partem, quanta eſt vis verticalis ipſum attollens. Haec autem (97) aequatur ponderi eiusdem fluidi, quod ſub eius volumine contineretur; ergo etiam tantum ponderis ſui amittet, quantum eſt pondus eiuſdem fluidi, quod sub eius volumine contineretur.

Corollarium II.

99. Unde ſi ſolidum, quod totum fluido immergitur, ſit immotum, ſive amittat integrum eius pondus; vis attollens aequabitur eius ponderi.

Corollarium III.

100. Et quoniam vis attollens aequatur (97) ponderi illius fluidi, quod ſub volumine ſolidi contineretur; etiam pondus fluidi, quod ſub volumine ſolidi contineretur, aequabitur ponderi eiuſdem ſolidi.

PROPOSITIO XXXII.

101. *Si planum libellae fluidi ſit* LK (*Fig.* 31. 30.), *et* GDF *ſit pars ſolidi eidem immerſa; vis ipſum attollens, aequabitur ponderi illius fluidi, quod contineretur ſub volumine* GDF.

I. Solidi maxima ſectio AE (Fig. 31.) ſit infra planum libellae LK, et ex ſingulis punctis perimetri ſectionis demittantur ad idem libellae planum perpendiculares, ut ita prodeat ſuperficies cylindrica AHIE. Iam vis verticalis, qua deorſum urgetur ſuperficies ſuperior ABE, vel potius eius portio GAEF, aequatur (93) ponderi fluidi comprehenſi a ſuperficie GAEF, ab eius projectione in plano LK, ſive ab armilla intercepta circulis HSI, GOF, et a ſuperficie cylindrica HAEI. Contra vis alia verticalis, qua ſurſum a fluido ſollicitatur inferior ſolidi ſuperficies ADE, aequatur (92) ponderi fluidi comprehenſi a ſuperficie ADE, ab eius projectione in plano LK, ſive a circulo HSI, et a ſuperficie cylindrica HAEI; igitur harum virium differentia, ſeu vis attollens ſolidum ABED, aequabitur ponderi illius fluidi, quod contineretur ſub volumine GDF.

II.

Digitized by Google

II. Solidi maxima ſectio A E (Fig. 30.) ſit ſupra planum libellae L K. Quoniam hoc in caſu ſuperficies ſuperior G B F nulla vi verticali deorſum ſollicitatur; utique differentia virium verticalium ſurſum, et deorſum agentium in ſuperficiem ſolidi A B E D, ſoli aequabitur verticali, qua ſurſum urgetur ſuperficies inferior G D F. Eſt autem haec (95) aequalis ponderi illius fluidi, quod contineretur ſub volumine G D F; ergo et vis attollens ſolidum A B E D, aequalis erit (97) ponderi illius fluidi, quod contineretur ſub volumine G D F.

Corollarium I.

102. Unde ſi fluido pars tantum ſolidi immergatur; hoc tantam amittet ponderis ſui partem, quanta eſt vis verticalis ipſum attollens, ſeu (101) quantum eſt pondus fluidi, quod contineretur ſub volumine immerſae partis.

Corollarium II.

103. Quare ſi hoc ſolidum ſit immotum, ſive amittat integrum eius pondus; vis verticalis ipſum attollens, aequabitur eius ponderi.

Corollarium III.

104. Et quoniam vis attollens hoc ſolidum, aequatur (101) ponderi fluidi, quod contineretur ſub volumine immerſae partis; etiam pondus fluidi quod contineretur ſub volumine immerſae partis, aequabitur ponderi eiuſdem ſolidi.

CAPUT V.

De menſura vis verticalis exercitae a fluido in ſuperficiem internam vaſis, quo continetur.

PROPOSITIO XXXIII.

105. S*I vas* A B C D (*Fig.* 32. 33.) *ex utraque parte* B E C F, A H D I *apertum, mergatur immoto fluido* M N O L; *ſuperficies externa, et convexa vaſis tanta vi introrſum verſus axem ab ambiente fluido comprimetur, quanta extrorſum premitur ſuperficies eius interna, et cava a fluido* A B E C D.

Si loco vaſis A B E C D ſubſtituatur moles fluidi eiuſdem conſtitutionis cum fluido ambiente, eiuſdemque figurae, magnitudinis, et poſitionis cum vaſe; utique hoc in caſu ſuprema totius fluidi ſuperficies M L erit, uti prius, horizontalis, et ideo (44) totum flui-

dum

Digitized by Google

dum in eodem quietis ſtatu perſeverabit. Unde ſuperficies externa, et convexa fluidi A B E C D tanta vi premetur ab ambiente fluido M N O L, quanta vi ſuperficies eius interna, et cava premitur a fluido A B E C D. Sed fluidum ambiens M N O L eandem exerit preſſionem in ſuperficiem vaſis rigidam, et convexam, quam exerceret in ſimilem, aequalem, et ſimiliter poſitam fluidi A B E C D, pariterque hoc fluidum A B E C D eandem exerit preſſionem in ſuperficiem eius cavam, quam exercebat in ſimilem, aequalem, et ſimiliter poſitam ſuperficiem cavam, ſed rigidam vaſis; ergo ſuperficies externa, et convexa vaſis A B E C D tanta vi introrſum premitur ab ambiente fluido M N O L, quanta vi ſuperficies eius interna, et cava extrorſum premitur a fluido A B E C D.

Corollarium I.

106. Ergo ſuperficies convexa, et cava vaſis A B E C D ab ambiente fluido, et ab interno viribus (105) aequalibus, et quidem directe oppoſitis (60) perpendiculariter comprimuntur.

Corollarium II.

107. Quia vires perpendiculares, quibus ſuperficies convexa, et cava vaſis a fluido comprimuntur, mutuo ſunt (105) aequales; ſequitur, etiam vires horizontales, et verticales, in quas reſolvuntur perpendiculares, aequales eſſe.

Corollarium III.

108. Sicuti vires perpendiculares ſunt (106) oppoſitae, et aequales, ita et verticales erunt oppoſitae, et aequales; hinc ſi vis verticalis urgens ſuperficiem convexam vaſis, deorſum agat, contra vis altera verticalis urgens ſuperficiem eius cavam, ſurſum aget, et viceverſa.

Corollarium IV.

109. Sicuti ergo vis verticalis fluidi ambientis, et deorſum ſollicitantis ſuperficiem convexam vaſis A B E C D (Fig. 33.), aequatur (93) ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie convexa vaſis A B E C D, ab armilla intercepta circulis P R Q S, A H D I, et a ſuperficie cylindrica P B C Q: ita vis verticalis, qua fluidum contentum vaſe A B E C D, ſurſum urget ſuperficiem eius internam, et cavam, aequabitur ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie convexa vaſis A B E C D, ab armilla intercepta circulis P R Q S, A H D I, et a ſuperficie cylindrica P B C Q. Eodem pariter ratiocinio demonſtratur, vim verticalem fluidi contenti in vaſe A B E C D (Fig. 32.), et deorſum urgentis ſuperficiem eius internam, et cavam, aequalem eſſe ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſu-

perficie interna, et cava vaſis A B E C D, ab armilla intercepta circulis P R Q S, A H D I, et a ſuperficie cylindrica P B C Q.

PROPOSITIO XXXIV.

110. *Si vas* ABECD (*Fig.* 33.), *cuius ſunt latera convergentia, plenum ſit fluido, habente ſuperficiem ſupremam in plano* A H D I; *differentia verticalium preſſionum ſurſum, et deorſum agentium in ſuperficiem internam vaſis, et eius fundum, aequabitur ponderi totius fluidi contenti in vaſe.*

Preſſio verticalis a fluido ſurſum exercita in ſuperficiem internam vaſis A B E C D, aequatur (109) ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie externa vaſis, ab armilla intercepta circulis P R Q S, A H D I, et a ſuperficie cylindrica P B C Q. Sed preſſio verticalis deorſum exercita in vaſis fundum B C, aequatur (51) ponderi columnae fluidae P B C Q; igitur differentia harum preſſionum aequabitur ponderi totius fluidi contenti in vaſe A B E C D.

COROLLARIUM.

111 Si itaque fundus vaſis cum eius lateribus firmiter ſit connexus; vas a contento fluido tanta vi deorſum ſollicitabitur, quantum eſt pondus eiuſdem fluidi.

PROPOSITIO XXXV.

112. *Si vas* ABECD (*Fig.* 32.), *cuius ſunt latera divergentia, plenum ſit fluido, habente ſuperficiem ſupremam in plano* A H D I; *ſumma omnium verticalium preſſionum, deorſum agentium in ſuperficiem internam vaſis, et eius fundum, aequatur ponderi totius fluidi contenti in eodem vaſe.*

Preſſio verticalis deorſum exercita a fluido in ſuperficiem internam, et cavam vaſis A B E C D, aequatur (109) ponderi eiuſdem fluidi comprehenſi a ſuperficie interna vaſis, ab armilla intercepta circulis P R Q S, A H D I, et a ſuperficie cylindrica P B C Q. Sed preſſio verticalis deorſum exercita ab eodem fluido in vaſis fundum B C, aequatur (51) ponderi columnae fluidae P B C Q; igitur ſumma harum preſſionum, quas deorſum exercet fluidum in ſuperficiem internam vaſis, et eius fundum, aequabitur ponderi totius fluidi contenti in vaſe.

COROLLARIUM I.

113. Si itaque vaſis fundus cum eius lateribus firmiter conne-

nectatur; vas a contento fluido deorſum urgebitur tanta vi, quantum eſt pondus totius fluidi contenti in vaſe.

COROLLARIUM II.

114. Ergo etſi qui regeret mobilem fundum vaſis, ne ipſe ab eius lateribus ſepararetur, adhiberet ſolummodo vim aequalem (51) ponderi columnae fluidae PBCQ; nihilominus tamen, ſi ipſe vellet regere fundum vaſis, eius lateribus firmiter inhaerentem, ſicque conaretur vel alio vas transferre, aut elevare, tunc illi vi altera opus eſſet, et quidem aequali ſummae ponderum vaſis, et fluidi in eo contenti.

CAPUT VI.

De menſura vis horizontalis exercitae a fluido in ſuperficiem ſolidi eidem immerſi, et in ſuperficiem internam vaſis, quo continetur.

LEMMA I.

115. SI *duae vires* P *et* Q (*Fig.* 34) *expoſitae duobus lateribus* AB, AC *trianguli* BAC, *perpendiculariter applicentur punctis mediis* M *et* N *laterum eorundem; ambae ſimul aequivalebunt vi expoſitae latere tertio* BC, *et perpendiculariter applicatae eius medio puncto* F.

Vires P et Q etiam exponantur rectis LM, IN, invicem convenientibus ad punctum R, quod centrum erit circuli circumſcripti triangulo BAC, et per quod etiam tranſibit vis aequipollens earum ſummae. Iuncta deinde MN, quae erit parallela ad BC, et demiſſa ex A ad latus BC perpendiculari AO, vis P, vel LM reſolvatur in duas LG, LS, ſive SM, GM, quarum prima ſit perpendicularis ad BC, altera vero ad hanc parallela. Simili modo vis alia Q, vel IN reſolvatur in duas HN, EN. Quia rectus angulus LMB aequatur recto alteri SMG, ablato hinc inde angulo LMG, reliquus GMB, vel huic alternus ABO aequabitur reliquo SML. Eſt autem rectus angulus AOB aequalis recto alteri MSL; ergo triangulum LSM erit ſimile AOB, et LM erit ad SM, ut AB ad BO. Sed vis LM (ex hyp.) exponitur per AB; ergo et vis SM erit expoſita per BO. Rurſus LM eſt ad LS, ut AB ad AO. Sed vis LM exponitur per AB; ergo et vis LS, vel GM erit expoſita per AO. Simili modo oſtendam, vim HN exprimi per CO, et vim EN per AO; igitur ſumma virium SM, HN

 erit

erit expoſita per BC, reliquae autem vires G M, E N exponentur eadem recta A O, et propterea aequabuntur. Iam vires P et Q, ſive L M, I N ſimul iunctae, aequivalent quatuor ſimul viribus S M, G M, H N, E N. Sed vires oppoſitae, et aequales G M, E N invicem eliduntur; igitur vires P et Q ſimul iunctae, aequivalent ſimul ſumptis viribus S M, H N, ſeu vi expoſitae per B C. Sunt autem vires S M, H N perpendiculares ipſi B C, ſeu parallelae; ergo etiam vis aequipollens earum ſummae, et expoſita per B C, erit prioribus parallela, ideoque perpendicularis etiam ad BC. Vidimus autem hanc vim tranſire per centrum R circuli circumſcripti triangulo B A C; ergo ipſa pariter biſecabit rectam B C in F.

L E M M A II.

116. *Si punctis mediis laterum* A B, B C, C D, D E, E A (*Fig.* 35.) *cuiuſvis polygoni* A B C D E *perpendiculariter applicentur vires* F, G, L, N, I, *expoſitae per ſingula ejus latera, quibus ſunt applicatae; ipſae invicem elidentur.*

Agantur diagonales C A, C E, et punctis mediis earundem perpendiculariter applicentur vires H, K, expoſitae per eaſdem diagonales C A, C E. Ponatur etiam vis alia M expoſita per E D, et perpendiculariter applicata puncto medio huius rectae, quae erit alteri vi N directe oppoſita, et aequalis. Iam in triangulo A B C vis H (115) aequipollet duabus ſimul viribus F et G. Sed in triangulo E A C vis K aequivalet duabus ſimul viribus I et H; igitur vis K aequivalebit tribus iunctis viribus I, F, G. Atqui in triangulo ECD vis M (115) aequivalet ſummae virium K et L; ergo etiam aequivalebit quatuor ſimul viribus I, F, G, L. Sed haec vis M eliditur ab aequali, et oppoſita alia N; ergo et vires quatuor I, F, G, L elidentur ab eadem vi N, et ideo vires F, G, L, N, I invicem elidentur.

L E M M A III.

117. *Si duo latera parallela* B A, C D (*Fig.* 36.) *trapezii* BADC *biſecentur in* E, *et* O, *iungaturque* E O; *haec tranſibit per centrum gravitatis trapezii* B A D C.

Demiſſa ex E ad C D perpendiculari E F, trapezium B E O C aequabitur facto ex ſemiſumma laterum B E, C O in rectam E F; trapezium vero E A D O facto ex ſemiſumma laterum E A, O D in rectam E F. Atqui (ex hyp.) haec facta invicem ſunt aequalia; ergo et trapezium B E O C aequabitur alteri E A D O. Itaque re-

cta

Digitized by Google

cta EO biſecabit trapezium BADC, ideoque etiam per eius centrum gravitatis tranſire debet.

Corollarium I.

118. Unde ſi ſumpta Oo infinite parva reſpectu EO, traducatur per o recta cd parallela ipſi CD, quae neceſſario biſecabitur ab alia EO in o; etiam recta Oo tranſibit (117) per centrum gravitatis trapezii cdDC.

Corollarium II.

119. Cum autem infinite propinquae, ac parallelae cd, CD cenſeri poſſint velut coincidentes, etiam trapezium cdDC haberi poteſt pro recta CD; igitur centrum gravitatis trapezii cdDC quamproxime idem erit cum centro gravitatis rectae CD, ideoque concipi poterit velut poſitum in medio puncto O huius rectae.

Corollarium III.

120. Igitur ſi fingatur trapezium ABDC (fig. 24.) habere oppoſita latera AB, CD parallela ad horizontem, et infinite proxima inter ſe; ſubinde vero eius centro gravitatis O ſic applicetur horizontalis vis quaepiam ON, ut ſit perpendicularis ad verticale planum FEDC; poterit haec vis concipi velut normaliter applicata puncto medio lateris CD.

Lemma IV.

121. *Centra gravitatis omnium trapeziorum* MNnm, NOon, &c. (*Fig.* 28.), *in quae iuxta propoſitionem* 30. *diviſa fuit ſuperficies ſtrati horizontalis* MNOPQRmnopqr, *ſunt quamproxime in eodem plano horizontali*.

Quia latera MN, mn trapezii MNnm ſunt (92) parallela, et infinite proxima inter ſe; centrum gravitatis eiuſdem trapezii cenſeri (119) poteſt veluti conſtitutum in puncto medio rectae mn. Pari modo oſtendam, centra gravitatis reliquorum omnium trapeziorum cenſeri poſſe ut conſtituta in punctis mediis reſpondentium aliorum laterum polygoni mnopqr; igitur centra gravitatis omnium trapeziorum MNnm, NOon, &c. erunt quamproxime in eodem plano horizontali, in quo iacet polygonum mnopqr.

Corollarium I.

122. Unde ſi idem ſtratum horizontale immerſum ſit fluido habenti libellam in plano LK (Fig. 27. 28.); centra gravitatis omnium trapeziorum, in quae diviſa eſt ſuperficies huius ſtrati, aequidiſtabunt (121) a plano LK.

Co-

Digitized by Google

Corollarium II.

123. Conſequenter ſi centrum gravitatis S trapezii MNnm diſtet a plano libello LK intervallo ST; etiam centra gravitatis reliquorum omnium trapeziorum eodem intervallo ST diſtabunt (122) a plano LK.

PROPOSITIO XXXVI.

124. *Si ſingulae vires perpendiculares, quibus ſolidum* ABED *(Fig. 27. 28.) urgetur a fluido, habente libellam in plano* LK, *reſolvantur in horizontales, et verticales; horizontales invicem elidentur.*

Finge ſolidum ABED diviſum eſſe in ſtrata horizontalia altitudinis infinite parvae, et multitudine infinita, quorum unum ſit MNOPQRmnopqr. Pone deinde quodvis ex his trapeziis, veluti MNnm, centrum gravitatis habere in puncto S, quod intervallo ST diſtet a plano libellae LK. Per ſingula tandem latera mn, no, op, pq, qr inferioris plani mnopqr intellige traducta eſſe verticalia plana, quae terminentur a ſuperiori plano MNOPQR. His poſitis, ſex plana haec verticalia aeque alta, component ſex facies laterales priſmatis recti, habentis pro baſi inferius planum mnopqr, et pro altitudine diſtantiam huius plani a ſuperiori altero MNOPQR. Iam ſi vis quaepiam applicata centro gravitatis S trapezii MNnm, perpendiculariter in hoc agat, ſimulque referat preſſionem perpendicularem a fluido exercitam in trapezium; utique ſi haec vis poſtea reſolvatur in verticalem, et horizontalem, horizontalis expoſita erit (88) per factum ex plano verticali traducto per mn, in ST. Eandem ob cauſam, vis horizontalis exercita a fluido in trapezium NOon, expoſita erit (88. 122.) per factum ex plano verticali traducto per no, in ST, et ſic deinceps; ergo vis horizontalis exercita a fluido in trapezium MNnm, erit ad illam, quae exeritur in trapezium NOon, ut factum ex verticali plano traducto per mn, in ST, ad factum ex verticali plano traiecto per no, in ST, ſive ut mn ad no. Simili modo oſtendam, vires horizontales a fluido exercitas in alia eiusdem ſtrati trapezia OPpo, PQqp, QRrq, RMmr, eſſe ut reſpondentia latera op, pq, qr, rm polygoni mnopqr. Demum cum ſingula haec trapezia habeant duo oppoſita latera parallela, et infinite propinqua; vires horizontales applicatae eorum centris gravitatis, ſpectari poſſunt (121) ut poſitae in eodem plano horizontali mnopqr, et perpendiculariter (120) applicatae ſingulis punctis mediis laterum mn, no, op, pq, qr, per quae exponuntur. Atqui vires ita agentes in latera polygoni mnopqr, mutuo (110)

ſe

Digitized by Google

ſe elidunt; ergo etiam elidentur vires horizontales a fluido exercitae in trapezia omnia ſtrati MNOPQRmnopqr. Id autem convenit etiam reliquis aliis ſtratis, in quae diviſum eſt ſolidum ABED; ergo ſi vires perpendiculares, quibus hoc ſolidum a fluido ſollicitatur, reſolvantur in verticales, et horizontales; horizontales mutuo elidentur.

PROPOSITIO XXXVII.

125. *Si vires perpendiculares a fluido exercitae in ſuperficiem internam vaſis, quo continetur, reſolvantur in verticales, et horizontales; horizontales invicem elidentur.*

Sit AD (Fig. 32. 33.) planum libellae fluidi contenti in vaſe ABECD. Dein hoc vas immerge externo, et priori homogeneo fluido MNOL, cuius libella ML ſit in eodem plano AD producto. Vires horizontales, quas fluidum contentum vaſe ABECD, in eius ſuperficiem internam exerit, aequantur (107) viribus illis horizontalibus, quas ambiens fluidum MNOL exercet in ſuperficiem externam vaſis. Sed vires horizontales a fluido ambiente exercitae in ſuperficiem externam vaſis, mutuo (124) eliduntur; ergo pariter elidentur vires horizontales, quas fluidum contentum vaſe ABECD, in ſuperficiem eius internam exerit.

CAPUT VII.

De Aequilibrio, et motu corporum ſolidorum, fluidis demerſorum.

LEMMA.

126. *Si manente volumine dati alicujus corporis homogenei, eius denſitas per totam maſſam uniformiter augeatur, vel minuatur; locus centri gravitatis eiuſdem corporis non mutabitur.*

Corpus homogeneum habet centrum gravitatis in magnitudinis eius centro. Sed poſtquam eius denſitas ubique aequaliter aucta eſt, vel diminuta, corpus etiamnum (11) remanet homogeneum; ergo habebit adhuc centrum gravitatis in magnitudinis eius centro. Sed cum volumen corporis (ex hyp.) non mutetur, eius centrum magnitudinis non variatur; ergo nec eius centrum gravitatis mutari debet.

Co-

Digitized by Google

Corollarium.

127. Ideo ſi totum homogeneum ſolidum A B D E (Fig. 37) homogeneo fluido F P Q G ſit immerſum; centrum gravitatis C eiuſdem ſolidi erit idem cum centro gravitatis eiuſdem fluidi, quod ſub eius volumine contineretur. Et ſi ſolidi A B D E (Fig. 38.) pars ſola A E D fluido H F G P ſit immerſa; centrum gravitatis c huius immerſae partis, erit idem cum centro gravitatis eiuſdem fluidi, quod ſub volumine immerſae partis A E D contineretur.

PROPOSITIO XXXVIII.

128. *Si ſolidum* A B D E (*Fig.* 37.), *quod totum immergitur fluido* F P Q G, *ſit immotum; vis verticalis ipſum attollens, eſſet in aequilibrio cum pondere eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine ſolidi* A B D E.

Cum immotum ſit ſolidum A B D E, vis verticalis ipſum attollens, erit in aequilibrio cum eius pondere. Sed pondus ſolidi A B D E aequatur (100) ponderi eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine A B D E; ergo vis verticalis attollens ſolidum A B D E, eſſet quoque in aequilibrio cum pondere eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine A B D E.

PROPOSITIO XXXIX.

129. *Si ſolidum* A B D E (*Fig.* 38.), *cuius ſola pars* A E D *immergitur fluido* H F G P, *ſit immotum; vis verticalis ipſum attollens, eſſet in aequilibrio cum pondere eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine immerſae partis* A E D.

Cum immotum ſit ſolidum A B D E, vis verticalis ipſum attollens, erit in aequilibrio cum eius pondere. Sed pondus ſolidi A B D E aequatur (104) ponderi eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine A E D; ergo vis verticalis attollens ſolidum A B D E, eſſet in aequilibrio cum pondere eiuſdem fluidi, quod contineretur ſub volumine A E D.

PROPOSITIO XL.

130. *Si ſolidum* A B D E (*Fig.* 37.), *quod totum immergitur fluido* F P Q G, *ſit immotum; vis verticalis ipſum attollens, per eius centrum gravitatis tranſire debet.*

Pun-

Digitized by Google

Punctum C ſit centrum gravitatis ſolidi A B D E ; quod etiam erit (127) centrum gravitatis ipſius fluidi, quod contineretur ſub volumine A B D E . Agatur ex C verticalis recta C M, quae etiam normalis erit ad vaſis fundum horizontalem P Q. Quia immotum eſt ſolidum A B D E , vis verticalis ipſum attollens, eſſet (128) in aequilibrio cum vi ponderis ipſius fluidi, quod contineretur ſub volumine A B D E, et ideo hae duae vires aequales forent, et in partes contrarias dirigerentur. Sed vis ponderis fluidi, quod contineretur ſub volumine A B D E , ageret in hoc fluidum ſecundum rectam verticalem C M ; igitur viceverſa vis verticalis attollens ſolidum A B D E, in hoc aget ſecundum rectam verticalem M C, quae tranſit per centrum gravitatis C ſolidi A B D E.

Scholion.

131. Haec propoſitio pariter habet locum, ſi manente volumine ſolidi A B D E, eius denſitas per totam maſſam uniformiter augeatur, vel minuatur, adeo ut ipſum vel intra fluidum cadat, vel ſurſum promoveatur. Nam ob ſic auctam, vel diminutam ſolidi denſitatem, locus eius centri C gravitatis non (126) mutatur; et ideo ſi dum ſolidum immotum erat, vis verticalis ipſum attollens, per eius centrum gravitatis (130) tranſibat, per illud quoque tranſire debet poſt auctam, vel diminutam eiuſdem ſolidi denſitatem.

PROPOSITIO XLI.

132. *Si ſolidum* A B D E (*Fig.* 38.), *cuius ſola pars* A E D *immergitur fluido* H F G P, *ſit immotum ; vis verticalis ipſum attollens, tranſibit per centrum gravitatis immerſae partis* A E D.

Punctum c ſit centrum gravitatis partis immerſae A E D, quod (127) etiam erit centrum gravitatis ipſius fluidi, quod contineretur ſub volumine A E D. Ex centro gravitatis c ducatur recta verticalis c M , quae perpendicularis quoque erit ad fundum horizontalem F G. Vis verticalis attollens ſolidum A B D E, eſſet (130) in aequilibrio cum vi ponderis fluidi, quod contineretur ſub volumine A E D, ideoque hae duae vires aequales eſſent, et agerent iuxta oppoſitas directiones. Sed vis ponderis fluidi, quod contineretur ſub volumine A E D, in hoc fluidum ageret iuxta rectam verticalem c M ; igitur e contrario vis verticalis elevans ſolidum, in hoc aget ſecundum rectam verticalem M c, quae tranſit per centrum gravitatis c partis immerſae A E D.

Digitized by Google

PROPOSITIO XLII.

133. *Si ſolidum* A B D E (*Fig.* 38.), *cuius ſola pars* A E D *fluido eſt immerſa, quieſcit; centra gravitatis eiuſdem ſolidi, et partis immerſae in eadem erunt linea verticali, ſive perpendiculari ad horizontem.*

Sit C centrum gravitatis ſolidi A B D E, c vero centrum gravitatis partis immerſae A E D. Vis ponderis ſolidi A B D E, et vis ipſum attollens, ſunt duae vires verticales, oppoſitae inter ſe, ſimulque agentes in idem ſolidum, quarum prima tranſit (130) per centrum gravitatis C ſolidi A B E D, altera autem tranſit (132) per centrum gravitatis c partis immerſae A E D. Sed hiſce viribus non obſtantibus, ſolidum (ex hyp.) eſt immotum; conſequens ergo erit, ut ambae hae vires ſe ſe elidant. Id vero contingere prorſus nequit, niſi duae lineae verticales, iuxta quas agunt, coincidant inter ſe; ergo centra gravitatis ſolidi A B E D, eiuſque partis immerſae A E D erunt in eadem linea verticali, ſive perpendiculari ad horizontem.

Corollarium.

134. Corpus ergo ſpecifice levius fluido, cui immergitur, locum quem occupat, non ſervabit, niſi centra gravitatis totius ſolidi, et eius immerſae partis in eadem ſint recta perpendiculari ad horizontem.

PROPOSITIO XLIII.

135. *Si ſolidum* A B D E (*Fig.* 37.), *quod totum fluido eſt immerſum, ſit eiuſdem ſpecificae gravitatis cum hoc fluido; immotum erit.*

Quia ſolidum A B D E eſt (ex hyp.) eiuſdem ſpecificae gravitatis cum fluido, cui immergitur; ipſum aeque (11) ponderabit ac fluidum comprehenſum ſub volumine A B D E. Sed vis verticalis, qua deprimitur ſolidum A B D E, eiuſdem ponderi eſt aequalis, et e contrario vis verticalis ipſum attollens, aequatur (99) ponderi fluidi ſub eius volumine comprehenſi; ergo vis verticalis, qua deprimitur ſolidum A B D E, aequalis erit vi verticali, qua attollitur. Sed cum ſingulae hae vires (130) tranſeant per centrum C gravitatis ſolidi A B D E, erunt ambae in eadem linea verticali; ergo elidi debent, ac propterea ſolidum immotum erit.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XLIV.

136. *Si ſolidum* ABDE (*Fig.* 37.), *quod totum fluido eſt immerſum, ſit ſpecifice gravius fluido, cui immergitur; idem intra fluidum ea deſcendet vi, quae aequatur exceſſui ſui ponderis ſupra pondus fluidi ſub eius volumine comprehenſi.*

Quia ſolidum ABDE eſt ſpecifice gravius fluido, cui immergitur; idem ſolidum (13) plus ponderabit, quam fluidum ſub eius volumine comprehenſum. Sed vis verticalis, qua deprimitur ſolidum ABDE, eiuſdem ponderi eſt aequalis, et contra vis verticalis, qua a fluido attollitur, eſt (99) aequalis ponderi fluidi ſub eius volumine comprehenſi; ergo et vis verticalis, qua deprimitur ſolidum ABDE, maior eſt vi verticali, qua attollitur. Sed cum ſingulae hae vires tranſeant (131) per centrum C gravitatis ſolidi ABDE, ambae agunt in eadem linea verticali; igitur ſolidum ABDE deſcendet vi aequali harum virium differentiae, hoc eſt vi, quae aequatur exceſſui ſui ponderis ſupra pondus fluidi ſub eius volumine comprehenſi.

PROPOSITIO XLV.

137. *Si ſolidum* ABDE (*Fig.* 37.), *quod totum fluido eſt immerſum, ſit ſpecifice levius fluido, cui immergitur; idem intra fluidum ea deſcendet vi, quae aequatur exceſſui ponderis fluidi ſub eius volumine comprehenſi, ſupra integrum pondus ſolidi.*

Cum ſolidum ſit ſpecifice levius fluido, in quo mergitur; idem (13) minus ponderabit, quam fluidum ſub eius volumine comprehenſum. Sed vis verticalis, qua deprimitur ſolidum ABDE, eiuſdem ponderi eſt aequalis, et contra vis verticalis, qua a fluido attollitur, aequalis eſt (99) ponderi fluidi ſub eius volumine comprehenſi; ergo et vis verticalis, qua deprimitur ſolidum ABDE, minor erit vi verticali, qua attollitur. Sed cum ſingulae hae vires (131) tranſeant per centrum C gravitatis ſolidi ABDE, ambae agunt in eadem linea verticali; ergo ſolidum ABDE intra fluidum aſcendet vi aequali harum virium differentiae, hoc eſt vi, quae aequatur exceſſui ponderis fluidi ſub eius volumine comprehenſi, ſupra integrum pondus ſolidi.

PROPOSITIO XLVI.

138. *Si* AED (*Fig.* 38.) *ſit pars immerſa ſolidi* ABDE *graviori fluido innatantis; gravitas ſpecifica ſolidi erit ad ſpecificam fluidi gravitatem, ut volumen partis immerſae* AED *ad integrum volumen ſolidi* ABDE.

Quando duo corpora volumine inaequalia, habent aequale pondus, gravitas ſpecifica primi eſt (27) ad ſpecificam gravitatem ſecundi, ut volumen ſecundi ad volumen primi. Sed pondus totius ſolidi A B D F aequatur (104) ponderi fluidi comprehenſi ſub volumine A E D; ergo et gravitas ſpecifica ſolidi A B D E erit ad illam fluidi comprehenſi ſub volumine A E D, ut volumen A E D ad volumen ſolidi A B D E. Sed gravitas ſpecifica fluidi comprehenſi ſub volumine A E D, eſt eadem cum illa fluidi, cui innatat ſolidum A B D E; ergo et gravitas ſpecifica ſolidi A B D E erit ad illam fluidi, cui ſolidum idem innatat, ut volumen partis immerſae A E D ad volumen integrum ſolidi A B D E.

Corollarium.

139. Ut ergo ſciamus quantum, et quomodo ſolidum A B D E immergi debeat fluido graviori, ut ita immerſum quieſcat, ſequentia ſunt praeſtanda. 1.° Solidum dividatur horizontali plano A D, ita ut totum volumen A B D E ſit ad eius partem A E D in ratione gravitatis ſpecificae fluidi H F G P ad ſpecificam gravitatem ſolidi A B D E. 2.° Quaerenda ſunt centra gravitatis C et c ſolidi A B D E, et partis A E D. 3.° Solidum A B D E ita fluido immergatur, ut pars eius immerſa, ſit A E D. 4.° Centra gravitatis C et c iungenda ſunt recta C c, quae ſi fuerit perpendicularis plano horizontali A D, indicio erit (133) ſolidum in hoc ſitu immotum futurum eſſe.

PROPOSITIO XLVII.

140. *Si ſolidum* A *(Fig. 39. 40) filo* P L *ſuſpenſum, ſucceſſive mergatur in fluidis ſpecifice levioribus* B C D E, F G H I; *pars ponderis ſui amiſſa intra fluidum* B C D E *erit ad illam, quam amittit intra fluidum* F G H I, *ut gravitas ſpecifica fluidi* B C D E *ad ſpecificam gravitatem fluidi* F G H I.

Solidum A immerſum fluido B C D E, eam amittit ponderis ſui partem, quae aequatur (98) ponderi eiuſdem fluidi ſub volumine A contenti. Rurſus dum ſolidum idem A immergitur fluido F G H I, pars ponderis ſui amiſſa, aequalis eſt (98) ponderi eiuſdem fluidi, quod ſub volumine A contineretur. Sed pondus fluidi B C D E ſub volumine A contenti, eſt (22) ad pondus fluidi F G H I, quod continetur ſub volumine eodem A, ut gravitas ſpecifica fluidi B C D E ad gravitatem ſpecificam fluidi F G H I; ergo etiam pars ponderis a ſolido A amiſſa intra fluidum B C D E, erit ad illam, quam amittit intra fluidum F G H I, ut gravitas ſpecifica fluidi B C D E ad ſpecificam gravitatem fluidi F G H I.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XLVIII.

141. *Invenire proportionem, quam inter ſe habent gravitates ſpecificae diverſorum corporum fluidorum.*

Ex lance una GH librae AB (Fig. 41.) ſuſpendatur 1.° aliquod pondus P, et in altera lance EF ponatur alterum pondus D, quod in aere aequilibrium ſervet cum alio P. 2.° Idem pondus P ſucceſſive diverſis fluidis immergatur, pondusque notetur, quod loco alterius D collocandum erit in lance EF, ut cum alio P in ſingulis fluidis merſo, aequilibretur. 3.° ſingula haec pondera ſubducantur ab alio D, ut relinquantur partes a pondere P amiſſae, dum in quolibet fluido mergeretur. 4.° Hae ponderis partes amiſſae invicem comparentur, et ſic (140) etiam prodibit ratio, quam inter ſe habent gravitates ſpecificae huiuſmodi fluidorum.

CAPUT VIII.

De aëris atmoſphaerici preſſione, eiuſque aequilibrio cum aliis fluidis ſpecifice gravioribus.

EXPERIMENTUM.

142. Tubum vitreum AB (Fig. 42.) digitis 40 circiter longum, et altera ſua extremitate A hermetice ſigillatum, mercurio imple. Tum ipſum inverte, obturato prius digito orificio B, inverſumque immerge cum claudente digito in vaſculum MNQ, alio mercurio plenum. Subtrahe dein paulatim digitum ab orificio B. Quo facto, videbis mercurium etſi graviſſimum, non totum deſcendere intra vaſculum MNQ, ſed adhuc in tubo ſuſpenſum haerere ad altitudinem HC digitorum 28 pedis Pariſini.

Scholion I.

143. Hoc eſt celebre illud experimentum ab Auctore ſuo Torricellio dictum torricellianum, quod ſicuti non ſine ſtupore a Philoſophis primitus exceptum fuit, ita doctrinae de aeris gravitate felices natales dedit, vulgatumque errorem Veterum profligavit, qui cum in tubis longioribus non cepiſſent experimentum, ſuſpenſionem liquorum in brevioribus horrori vacui adſcribebant. Non obſtante enim praetenſo hoc vacui metu, compertum eſt liquores deſcendere in procerioribus tubis, in quibus per hunc deſcenſum aeque ac in brevioribus eſſet vacuum metuendum.

Digitized by Google

Scholion II.

144. Notandum vero altitudinem HC digitorum 28, ad quam mercurius in tubo ſuſpenſus haeret, permanentem non eſſe, ſed variabilem; ſi enim tubum torricellianum aliquandiu aeri expoſueris, videbis mercurium modo aſcendere uſque ad E, modo deſcendere uſque ad F, ita tamen ut variatio EF duos digitos vix excedat.

Scholion III.

145. Haec autem altitudinum variatio multo minor eſt in regionibus proximis aequatori. Obſervavit (a) enim Nob. Condamine in ora maritima Regni Peruani hanc mutationem toto anni decurſu vix eſſe 3 linearum. Eadem ferme etiam inventa fuit altitudinum variatio in urbe Batavia, quae in inſula Iava extat. Rurſus hæc variatio in Promontorio Bonae Spei non ultra 10 lineas ſe extendit. Tandem in Urbe Quito poſita in excelſo monte Cordelliere, maxima differentia altitudinum mercurii in tubo vix ſuperat lineam $1\frac{1}{2}$.

Definitio XI.

146. *Aer conſiſtentiae naturalis* eſt atmoſphericus ille aer, qui proxime ambit hanc ſuperficiem terrae.

Propositio II.

147. *Aer, ex quo componitur atmoſphaera eſt gravis.*

Superficies mercurii ſtagnantis in vaſculo ſit MQ (Fig. 42.), et pars tubi torricelliani eidem immerſa, ſit CBD; eritque ſectio eius CD portio ſuperficiei horizontalis MQ. Cum (ex hyp.) quieſcat mercurius contentus vaſculo MNQ, ſingulae eius particulae in ſuperficie eius MQ conſtitutae, viribus aequalibus, et ad eandem normalibus (46) premi deorſum debent. Sed particulae poſitae in CD, premuntur deorſum ab aequalibus ponderibus filamentorum mercurii, ſuperficiei MQ perpendiculariter inſiſtentium; ergo particulae etiam aliae in eadem ſuperficie MQ conſtitutae, aequalibus ponderibus, quae prioribus aequivaleant, comprimentur. Atqui haec pondera nequeunt eſſe alia praeter illa filamentorum aeris atmoſphaerici, ſuperficiei MQ perpendiculariter inſiſtentium; ergo ſingula aeris atmoſphaerici filamenta tantundem ponderant, quantum mercurii ſingula fila-

(a) Voyage de la Riviere des Amazones, et Introduction hiſtorique pag. 162.

Digitized by Google

lamenta, ex quibus conſtat columna H D, et ideo aer, ex quo componitur atmoſphaera, eſt gravis.

COROLLARIUM.

148. Hinc ſi ſupra circulum P L, aequalem baſi C D columnae mercurialis H D, erecta concipiatur columna aeris I L, protenſa uſque ad terminum atmoſphaerae; pondus huius columnae aequabitur ponderi mercurialis columnae H D. Nam ſingula aeris filamenta, ex quibus conſtat columna I L, tantundem ponderant (147), quantum ſingula filamenta mercurii, quae componunt columnam H D. Sed tot ſunt aeris filamenta in columna I L, qnot ſunt filamenta mercurii in columna H D; ergo pondus columnae I L aequabitur ponderi columnae H D. Pondus columnae I L vocabitur deinceps *pondus*, aut *preſſio atmoſphaerae*.

COROLLARIUM II.

149. Et ideo ſi oceanus mercurii digitis 28 altus, eſſet globo terraqueo circumfuſus; tunc eiuſdem globi terraquei ſuperficies eandem preſſionem (148) ſubiret ab hoc oceano, quantam nunc ſubit ab aere atmoſphaerae.

COROLLARIUM III.

150. Hinc atmoſphaericus ille aer, qui proxime ambit hanc ſuperficiem terrae, quique eſt etiam (146) conſiſtentiae naturalis, erit in ſtatu compreſſionis. Nam premitur (148) gravitate aeris ſuperioris perinde ac ſi ſuſtineret pondus columnae mercurialis, eidem normaliter inſiſtentis, et (149) altae digitis 28.

PROPOSITIO L.

151. *Pondus mercurialis columnae* H D (*Fig.* 43.), *digitis* 28 *altae, aequatur ponderi aqueae columnae* V G, *aeque craſſae, et altae pedibus* 32, *et digitis* 8.

Quia altitudo V I eſt (ex hyp.) pedum 32 et digitorum 8, eadem erit etiam digitorum 392, et ideo V I erit ad H C, ut 392 ad 28, ſive ut 14 ad 1. Sed cum mercurius decies quater gravior ſit quam aqua, gravitas ſpecifica mercurialis columnae H D eſt ad gravitatem ſpecificam columnae aqueae V G, ut 14 ad 1; ergo etiam V I erit ad H C, ut gravitas ſpecifica mercurialis columnae H D ad gravitatem ſpecificam aqueae columnae V G. Sed cum hae duae columnae (ex hyp.) habeant aequales baſes, eſt V I ad H C, ut columna V G ad columnam H D; ergo et gravitas ſpecifica mercurialis columnae H D erit ad illam aqueae columnae V G, ut haec columna V G ad columnam H D,

ideo-

Digitized by Google

ideoque pondus mercurialis columnae HD aequabitur (27) ponderi aqueae columnae VG.

Corollarium.

152. Hinc preſſio columnae atmoſphaericae aequabitur ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 32, digitis 8. Nam preſſio columnae atmoſphaericae aequatur ponderi columnae mercurialis, aeque craſſae, ſed altae digitis 28. Atqui pondus hujus columnae aequatur (151) ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 32, et digitis 8; ergo et preſſio columnae atmoſphaericae aequabitur ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 32, et digitis 8.

Scholion.

153. Haec vera ſunt in hypotheſi, quod altitudo mercurii in tubo torricelliano ſit digitorum 28. Caeterum ſi eadem altitudo fuerit digitorum 27, aut 29, ut ſaepe (144) contingit; in primo caſu preſſio columnae atmoſphaerae aequabitur ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, et altae pedibus 31, et digitis 6; in altero autem ponderi columnae aqueae, aeque craſſae, ac altae pedibus 33, et digitis 10.

PROPOSITIO LI.

154. *Aer conſiſtentiae naturalis, ſive qui proxime ambit hanc ſuperficiem terrae, eſt fluidum compreſſibile.*

Sit cylindricus inflexus tubus LABNCP (Fig. 44), ubivis aeque amplus, et conſtans duobus cruribus verticalibus AO, PK, et horizontali SN. Altitudo AS longioris cruris AO ſit pedum 6, et altitudo CK brevioris PK ſit pedis 1, ſeu 12 digitorum. Extremitas AL primi cruris AO ſit patens, et ſecundi extremitas PC hermetice ſigillata. Hoc poſito, ſi per orificium patens AL tantam mercurii copiam tubo infundas, quae ſolum repleat crus SN, ita ut ſuperficies SO, MK in eodem ſint plano horizontali SK; aer crure PK incluſus, erit conſiſtentiae naturalis, aut aeque preſſus ac aer externus, proxime ambiens tubum. Superficies enim SO mercurii immoti SN premitur deorſum (147) a pondere columnae atmoſphaericae orificio AL verticaliter inſiſtentis. Atqui haec preſſio ope mercurii SN transfertur (33) etiam in aerem crure PK contentum; igitur etiam aer crure PK contentus, ſurſum premitur vi aequali ponderi columnae atmoſphaericae, quae orificio AL inſiſtit. Sed

aer

Digitized by Google

aer preſſus a ſolo pondere atmoſphaerae eſt (150) conſiſtentiae naturalis; ergo et aer crure PK contentus, erit conſiſtentiae naturalis. Nunc alium mercurium in tubum immitte, qui in longiori crure aſcendat uſque ad H, in breviori autem uſque ad E, et duc per E planum horizontale ED. Iam ſi contingat, ut altitudo HD mercurialis columnae HQ ſit 28 digitorum, videbis CE eſſe 6 digitorum, ideoque concludes, aerem, qui prius continebatur integro ſpatio PK, modo redactum eſſe in ſpatium duplo minus PE. Si alio tandem mercurio in tubum immiſſo, ipſe aſcenderit uſque ad I, et G, adeo ut (ducto per G plano horizontali GF) altitudo FI mercurialis columnae IR ſit duplo maior digitis 28; deprehendes CG eſſe 4 digitorum, atque ita etiam colliges, aerem prius contentum in ſpatio PK, tunc contractum eſſe in ſpatium triplo minus PG. Sed aer, qui prius continebatur in ſpatio PK, erat (ex demonſtr.) conſiſtentiae naturalis; igitur aer conſiſtentiae naturalis eſt fluidum compreſſibile.

PROPOSITIO LII.

155. *Si eadem maſſa aeris conſiſtentiae naturalis modo maiori, modo minori pondere comprimatur; eadem reducetur in ſpatium tanto minus, quanto maius eſt pondus, quo premitur, hoc eſt pondera eandem maſſam aeris comprimentia, erunt reciproce ut ſpatia, ad quae ipſa reducitur.*

Quamdiu mercurius inditus tubo LABNCP (Fig. 44) replet ſolum crus horizontale SN, aer ſpatio PK contentus, eſt (154) conſiſtentiae naturalis, aut tantummodo ſurſum preſſus vi aequali ponderi columnae atmoſphaericae, quae orificio AL inſiſtit. Si vero mercurius inditus tubo, aſcenderit uſque ad H, et G, aerque ſubinde contrahatur in ſpatium PE; hic (154) premetur ſurſum tum a pondere columnae atmoſphaericae, quae orificio AL inſiſtit, tum etiam a pondere mercurialis columnae HQ, altae digitis 28. Atqui pondus mercurialis columnae HQ aequatur (148) ponderi columnae atmoſphaericae, orificio AL inſiſtentis; igitur aer in ſpatium PE contractus, premitur ſurſum a pondere duplo illius, quo premebatur, dum occupabat integrum ſpatium PK. Sed etiam ſpatium PK eſt (154) duplum ſpatii PE; ergo et pondus, quo premitur aer in ſpatium PE contractus, erit ad pondus, quo premitur idem aer incluſus ſpatio PK, ut ſpatium PK ad ſpatium PE. Simili modo oſtendam pondus, quo premitur aer in ſpatium PG redactus, eſſe triplum illius, quo premebatur, dum occupabat ſpatium PK, et ideo primum pondus eſſe ad alterum, ut ſpatium PK ad ſpatium PG; igitur generatim pondera eandem maſſam aeris comprimentia, erunt reciproce ut ſpatia, ad quae ipſa reducitur.

Digitized by Google

Scholion.

156. Neque obiici poteſt quod ſi haec lex compreſſionis univerſaliter vera eſſet, finita aliqua maſſa aeris preſſa a pondere infinito, infinite parvum ſpatium occuparet; preſſa vero a pondere infinite parvo, occuparet ſpatium infinitum, quod eſt abſurdum. Hoc enim ad ſummum probare poteſt, hanc legem non poſſe extremis compreſſionibus, et dilatationibus aeris applicari, quod veriſſimum plane eſt; quacunque enim figura ſint praeditae partes aeris, ipſae ubi ad ſummum compreſſionis et dilatationis gradum pervenerint, non poſſunt amplius comprimi, et dilatari. Verum cum vires, quas in noſtris experimentis ad comprimendum aerem adhibemus, mediocres ſint, certoſque limites non excedant; lex compreſſionis ſuperius demonſtrata, tamquam univerſaliter vera cenſenda erit, dummodo tamen aer in compreſſionibus ſucceſſivis eidem ſemper caloris gradui exponatur. Certe experimenta a Bouguerio (a), et Godinio inſtituta tam in inſulis Sancti Dominici, et Martinicae, quam in altiſſimis montibus Peruanis, accurate ſatis oſtendunt, pondera, quibus premitur eadem maſſa aeris, ſemper eſſe reciproce ut ſpatia, ad quae ipſa reduci ſolet.

Corollarium.

157. Hinc pondera eandem maſſam aeris comprimentia, erunt etiam ut compreſſi aeris denſitates. Nam eadem maſſa aeris redditur eo denſior, quo minus eſt ſpatium, ad quod reducitur; ideoque eiuſdem maſſae aeris denſitates erunt reciproce ut ſpatia, ad quae ipſa reducitur. Sed etiam pondera eandem maſſam aeris comprimentia, ſunt (155) reciproce ut ſpatia, ad quae ipſa reducitur; igitur erunt quoque, ut compreſſi aeris denſitates.

PROPOSITIO LIII.

158. *Aer conſiſtentiae naturalis, ſeu qui proxime ambit hanc ſuperficiem terrae, eſt praeditus vi elaſtica.*

Per orificium patens A L (Fig. 44.) inflexi tubi L A B N C P eam mercurii copiam in eum immitte, ut ſolum repleat horizontale crus S N, quo in caſu, mercurio manente immoto, ambae eius ſuperficies aequales S O, M K erunt in eodem plano horizontali S K, aerque crure P K contentus, erit (154) conſiſtentiae naturalis. Itaque cum mercurius crure S N contentus, ſit in aequilibrio conſtitutus, eius ſuperficies aequales S O, M K deorſum aequaliter comprimentur. Sed ſuperficies S O premitur (150) deorſum a pondere co-

(a) Hiſt. de l'Acad. Roy. ann. 1753.

columnae atmoſphaericae, ipſi normaliter inſiſtentis; ergo et ſuperficies alia MK deorſum premetur vi, quae ponderi eiuſdem columnae atmoſphaericae ſit aequalis. Sed haec vis premens deorſum ſuperficiem MK, oriri nequit a pondere aeris ſpatio PK incluſi, quia hoc pondus cum illo totius columnae atmoſphaericae comparatum, pro nullo haberi poteſt; igitur ſolum debet procedere a conatu, quem exerit idem aer ad maius ſpatium occupandum, atque ita ipſe erit (10) praeditus vi elaſtica. Sed aer ſpatio PK incluſus, eſt (ex demonſtr.) conſiſtentiae naturalis; igitur aer conſiſtentiae naturalis eſt praeditus vi elaſtica.

Corollarium I.

159. Hinc vis elaſtica aeris conſiſtentiae naturalis, aut proxime ambientis hanc ſuperficiem terrae, aequalis erit (158) ponderi columnae atmoſphaericae, ipſi verticaliter inſiſtentis.

Corollarium II.

160. Unde quaelibet maſſa aeris conſiſtentiae naturalis pari vi expandere ſe conatur, hoc eſt vim elaſticam eandem habet, ſive ipſa toto atmoſphaerico pondere ſit gravata, ſive in aliquo vaſe clauſa.

Corollarium III.

161. Et ideo tanta vi premet interna vaſis latera, in quo clauditur, quanta haec premerentur a pondere columnae atmoſphaericae incumbentis.

Corollarium IV.

162. Non itaque eſt mirandum, ſi mercurius contentus tubo Torricelliano, ad eandem ſemper altitudinem ſuſpendatur, ſive tubus, et vaſculum, cui immergitur, ſint in aliquo loco clauſo, ſive libero aeri exponantur. Quamvis enim in loco clauſo ſuperficies mercurii ſtagnantis in vaſculo, non prematur a pondere atmoſphaerae; premitur nihilominus ab incluſi aeris vi elaſtica, quae (159) eidem ponderi aequipollet.

PROPOSITIO LIV.

163. *Si eadem maſſa aeris conſiſtentiae naturalis reducatur in ſpatium duplo, aut triplo minus; eius vis elaſtica e contrario fiet duplo, aut tripla maior.*

In tubum inflexum LABNCP (Fig. 44.) tantam infunde mercurii quantitatem, ut aer conſiſtentiae (154) naturalis ſpatio PK

contentus, reducatur in ſpatium P E, vel P G, duplo, aut triplo minus. Dico, quod viceverſa vis elaſtica eius fiet duplo, aut triplo maior. Siquidem aer conſiſtentiae naturalis ſpatio P K incluſus, premitur a ſolo pondere atmoſphaerae; redactus autem ad ſpatium P E, vel P G, premitur a pondere, quod duplum, aut triplum eſt (155) ponderis atmoſphaerae. Unde eodem modo, quo ſupra (158) oſtendi vim elaſticam aeris ſpatio P K contenti, aequalem eſſe ponderi atmoſphaerae, etiam demonſtrabo, vim elaſticam aeris ad ſpatium P E redacti, duplam eſſe ponderis atmoſphaerici, et vim elaſticam aeris in ſpatium P G contracti, ponderis atmoſphaerici triplam eſſe; igitur vis elaſtica aeris redacti in ſpatium P E, dupla eius erit, quam ipſe habebat, cum repleret ſpatium P K, et vis elaſtica aeris in ſpatium P G contracti, tripla eiuſdem erit.

Corollarium I.

164. Sicuti ergo ſi eadem maſſa aeris conſiſtentiae naturalis redigatur in ſpatium duplo, aut triplo minus, vis elaſtica eius fit (163) duplo, aut triplo maior: ita ſi e contrario dilatetur in ſpatium duplo, aut triplo maius, vis elaſtica eius fiet duplo, aut triplo minor.

Corollarium II.

165. Propterea generatim vis elaſtica aeris creſcit, aut diminuitur in ratione reciproca ſpatiorum, ad quae ipſe reducitur.

Corollarium III.

166. Et quia pondera eandem maſſam aeris comprimentia, ſunt (155) in ratione reciproca ſpatiorum, ad quae ipſa reducitur; conſequens eſt, ut etiam vis elaſtica eius creſcat, aut minuatur (165) in ratione ponderum comprimentium.

Propositio LV.

167. *Aer, ex quo componitur atmoſphaerica columna* I L (*Fig. 42.*), *eſt fluidum heterogeneum.*

Cum gravis ſit (147) aer, quo conſtat columna I L; utique ille, qui propior eſt baſi P L, maiori pondere premi debet, quam qui eſt remotior ab eadem. Atqui compreſſi aeris denſitates ſunt (157) ut pondera comprimentia; ergo aer, qui propior eſt baſi P L, denſior alio erit, qui maiori intervallo ab illa diſtat. Denſitas ergo aeris, ex quo conſtat columna I L, augebitur accedendo ab I ad P; atque adeo ipſa per totam eius maſſam difformis erit. Sed fluidum, cuius denſitas per totam maſſam difformis eſt, dicitur (18) heterogeneum; ergo aer, ex quo componitur atmoſphaera, eſt fluidum heterogeneum.

Scho-

Digitized by Google

SCHOLION.

168. Si tamen altitudo PO alicuius ſtrati horizontalis QL admodum parva ſit prae altitudine atmoſphaerae; tunc denſitas aeris conſiderari poterit ut protracta uniformiter a P uſque ad Q; et ideo totus aer eiuſdem ſtrati cenſendus erit ut fluidum homogeneum. Nam pondera atmoſphaerica, quae comprimunt partes ſingulas huius ſtrati, quam proxime ſunt aequalia inter ſe. Sed harum partium denſitates ſunt (157) ut pondera comprimentia; ergo et denſitates partium earundem poterunt accipi ut aequales, ac per conſequens totus aer, quo componitur idem ſtratum, habendus erit ut fluidum homogeneum.

PROPOSITIO LVI.

169. *Aſcenſus, et deſcenſus mercurii in tubo Torricelliano indicant incrementum, et decrementum ponderis atmoſphaerae.*

Quia pondus atmoſphaericae columnae IL (Fig. 42.) aequatur ponderi (148) mercurialis columnae HD, cum qua aequilibratur; utique manente eadem mercurii altitudine HC in tubo, idem manebit etiam pondus atmoſphaericae columnae IL. At ſi contingat, ut aliqua pars mercurii, quae prius in vaſculo ſtagnans erat, tubum ingrediatur, et mercurius aſcendat uſque ad E; tunc pondus columnae IL, quod prius erat in aequilibrio cum pondere mercurialis columnae HD, conſtituet aequilibrium cum pondere gravioris columnae ED; id quod fieri prorſus nequit, niſi antea auctum fuerit pondus columnae IL. Si vero contra aliqua pars mercurii ſuſpenſi in tubo, in vaſculum cadat, et ſubinde mercurius deſcendat ad punctum F; tunc pondus columnae IL, quod prius erat in aequilibrio cum pondere mercurialis columnae HD, aequilibrabitur cum pondere levioris columnae FD; quod fieri prorſus nequit, niſi antea fuerit diminutum pondus columnae IL. Quare aſcenſus, et deſcenſus mercurii in tubo Torricelliano, indicant incrementum, et decrementum ponderis atmoſphaerae.

SCHOLION.

170. Supponit hoc theorema, elaſticitatem aeris atmoſphaerici eandem perpetuo conſervari. At ſi in regione media, aut infima atmoſphaerae a nonnullis halitibus erumpentibus a tellure, ab igne ſolis, ab igne ſubterraneo, aliiſque cauſis elaſticitas aeris intendatur; in hoc caſu mercurius contentus vaſculo, fortius comprimetur, atque ita altius elevabitur intra tubum, etiamſi pondus atmoſphaericum non mutetur.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIUM.

171. Cum ergo tubus Torricellianus ob aſcenſum, deſcenſumque mercurii in eo ſuſpenſi, indicet incrementum, et decrementum ponderis atmoſphaerae, iure quidem, ac merito *Baroſcopium*, aut *Barometrum* appellatur.

PROPOSITIO LVII.

172. *Coelo ſereno, altitudo mercurii ſuſpenſi in Barometro, erit maior, quam coelo pluvio.*

Quia, coelo ſereno, vapores contenti in atmoſphaera, quieſcunt, ipſi totam vim ponderis ſui impendent in comprimendo aere inferiori. Sed hic aer inferior etiam (148) premitur pondere aeris ſuperioris; igitur tota preſſio atmoſphaerae aequivalebit his duobus ponderibus ſimul ſumptis. At, coelo pluvio, cum vapores, qui prius immoti erant in atmoſphaera, actu deſcendant; ipſi non totam vim ponderis ſui impendent in comprimendo aere inferiori, ſed ſolummodo eam partem, quae neceſſaria eſt ad ſuperandam eiuſdem aeris reſiſtentiam. Ergo, coelo ſereno, preſſio atmoſphaerae eſt maior, quam coelo pluvio. Sed preſſio atmoſphaerae aequatur (148) ponderi columnae mercurialis, quae in Barometro eſt ſuſpenſa; ergo et pondus huius columnae maius erit coelo ſereno, quam pluvio, ideoque altitudo mercurii ſuſpenſi in Barometro, maior erit ſereno coelo, quam pluvio.

PROPOSITIO LVIII.

173. *Si ex humiliori loco Barometrum transferas in altiorem, deſcendet mercurius intra tubum; aſcendet vero, ſi ex altiori loco ipſum transferas in humiliorem.*

Quo altior eſt locus ubi Barometrum A B (Fig. 42.) ponitur, eo minor eſt ibi altitudo atmoſphaericae columnae I L, atque adeo etiam eo minus erit eiuſdem pondus. Sed pondus huius columnae I L aequatur (148) ponderi columnae mercurialis ſuſpenſae in tubo; ergo quo altior eſt locus, ubi Barometrum collocatur, eo minus etiam ibi erit pondus columnae mercurialis in eo ſuſpenſae. Quare ſi ex loco humiliori Barometrum transferas in altiorem, deſcendet mercurius intra tubum. Simili modo oſtendam, mercurium aſcendere intra tubum, ſi ex altiori loco Barometrum deferas in inferiorem.

Digitized by Google

Scholion I.

174. Ex accuratis Philoſophorum obſervationibus innoteſcit, Barometrum ex ſuperficie terrae ad montis alicuius verticem elevato, mercurium ſuſpendi ad altitudinem minorem illa, ad quam elevatur in ſuperficie terrae, poſito eodem loco, et tempore, quo capiuntur experimenta. Conſtat ſimiliter viceverſa, Barometro in fodinis profundiſſimis conſtituto, mercurium in eo ſuſpenſum, altius elevari, quam in ſuperficie terrae.

Scholion II.

175. At ſi quaeratur ad quamnam altitudinem ſupra ſuperficiem terrae ſit Barometrum attollendum, ut mercurius in eo ſuſpenſus, fiat una linea pariſina depreſſior, quam in eadem ſuperficie, aut in littore maris? Ut ſatisfiat huic quaeſtioni, conſulenda imprimis eſt tabella obſervationum, quam affert Muſſchembroekius (a) in ſuis commentariis in Tentamina Academiae Cimentinae. Iuxta hanc autem Toinardus invenit, Barometro elevato ad altitudinem pedum 60 ſupra ſuperficiem terrae, mercurium in eo ſuſpenſum, una linea deſcendiſſe. Caſſinus autem expertus eſt, mercurium non deſcendiſſe per altitudinem unius lineae, niſi prius Barometrum attolleretur ad altitudinem pedum 80. Piccardus denique obſervavit, mercurium fuiſſe una linea depreſſiorem, cum Barometrum elevaretur ad altitudinem pedum 85 ½. Unde ſi harum altitudinum media capiatur, ſtatui poteſt mercurium fieri una linea depreſſiorem, ſi Barometrum attollatur ad altitudinem pedum 75 ſupra ſuperficiem terrae.

Scholion III.

176. Nec mirum videri debet, quod tres allatae obſervationes ita differant inter ſe, ut enim barometricae obſervationes accurate conveniant inter ſe, ipſae eodem tempore, et in locis aeque altis inſtitui debent. Nam in eodem etiam terrae loco atmoſphaera non ſemper eſt aeque gravis; quo autem gravior eſt atmoſphaera, eo minus erit Barometrum elevandum, ut mercurius deſcendat una linea Pariſina, et contra quo levior eſt atmoſphaera, eo magis erit Barometrum elevandum, ut mercurius ſuſpenſus in tubo, una linea deprimatur. Praeterea obſervationes eodem tempore etiam captae in locis non aeque altis, mutuo diſcrepabunt; nam in loco inferiori aer utpote magis preſſus, gravior eſt quam in altiori, ideoque in primo caſu

(a) Tentamina experimentorum naturalium captorum in Academia *del Cimento* pag. 54.

Digitized by Google

caſu Barometrum erit minus elevandum quam in alio, ut mercurius in eo ſuſpenſus, una linea deprimatur. Cum autem tres allatae obſervationes nec eodem tempore, neque in locis aeque altis fuerint inſtitutae, neceſſario debebunt invicem diſcrepare.

PROPOSITIO LIX.

177. *Gravitas ſpecifica mercurii eſt ad gravitatem ſpecificam aeris conſiſtentiae naturalis, ut 10800. ad 1.*

Barometrum A B (Fig. 42.) ſtatuatur ad littus maris, et altitudo mercurii in eo ſuſpenſi, ſit H C; eritque (148) mercurii columna H D eiuſdem ponderis cum atmoſphaerica columna I L. Iam ſi accepta altitudine P O pedum 75, Barometrum transferatur ad locum O, deſcendet mercurius (175) intervallo H F unius lineae, et mercurialis columna F D erit eiuſdem ponderis cum aerea alia I S; igitur reliqua mercurialis columna H K tantundem ponderabit, quantum reſidua aeris columna O L. Atqui aer contentus columna O L, cenſeri poteſt (168) ut fluidum homogeneum; ergo gravitas ſpecifica mercurialis columnae H K erit (27) ad ſpecificam gravitatem aeris contenti in columna O L, ut columna O L ad columnam H K, ſive ut O P ad H F, aut ut altitudo pedum 75, ſeu linearum 10800 ad altitudinem unius lineae, ſive ut 10800. ad 1. Atqui aer, ex quo componitur columna O L, proxime ambit hanc ſuperficiem terrae, ſive eſt conſiſtentiae naturalis; ergo gravitas ſpecifica mercurii erit ad gravitatem ſpecificam aeris conſiſtentiae naturalis, ut 10800. ad 1.

Corollarium.

178. Hinc gravitas ſpecifica aquae erit ad ſpecificam gravitatem aeris proxime ambientis hanc ſuperficiem terrae, ut $771\frac{3}{7}$ ad 1. Nam gravitas ſpecifica aquae eſt ad ſpecificam gravitatem mercurii, ut 1 ad 14. Sed gravitas ſpecifica mercurii eſt ad ſpecificam gravitatem aeris (177), ut 10800 ad 1; ergo ex aequo, et ex compoſitione rationis, gravitas ſpecifica aquae erit ad ſpecificam aeris gravitatem, ut 10800 ad 14, ſive ut $771\frac{3}{7}$ ad 1. Haec autem ratio quamproxime aequalis eſt rationi 774 [illegible]/41, quam Ioannes Bernoullius invenit per condenſationem aeris factam in vaſe aeneo valde amplo.

LEM.

LEMMA

179. *Quantitates differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.*

Sint rectae AH, AG, AL, AM, AN (Fig. 50.) quarum differentiae HG, GL, LM, MN. Sit quoque AH ad AG, ut HG ad GL, AG ad AL, ut GL ad LM, et AL ad AM, ut LM ad MN. Dico, quod rectae AH, AG, AL, AM, AN erunt continue proportionales. Quia AH eſt (ex hyp.) ad AG, ut HG ad GL; etiam permutando, erit AH ad HG, ut AG ad GL, et componendo, AG ad HG, ut AL ad GL, et convertendo, AG ad AH, ut AL ad AG, et invertendo, erit AH ad AG, ut AG ad AL. Simili modo oſtendam, AG eſſe ad AL, ut AL ad AM, et AL eſſe ad AM, ut AM ad AN; ergo rectae AH, AG, AL, AM, AN erunt continue proportionales.

PROPOSITIO LX.

180. *Si altitudo atmoſphaerae* AT (*Fig.* 51.) *diviſa concipiatur in partes infinite parvas, et aequales* AB, BC, CD, DE, *&c.*; *aeris denſitates in locis* A, B, C, D, E, *&c. erunt continue proportionales.*

Rectae AH, BI, CK, DL, EM, &c. perpendiculares ad altitudinem AT, exponant aeris denſitates in locis A, B, C, D, E, &c. quae uniformiter continuentur ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, E, &c. Preſſio, quam particula A ſubit a columella AB, eſt ad preſſionem, quam ſuſtinet particula B, vel A a columella BC, ut pondus columellae AB ad pondus columellae BC, ſive (25) in ratione compoſita denſitatis AH ad denſitatem BI, et voluminis AB ad volumen BC, ſive (ob aequalia volumina AB, BC) ut AH ad BI. Si ergo AH ſit preſſio, quam particula A ſubit a columella AB, erit ſimiliter BI preſſio, quam eadem ſubit a columella BC. Eandem ob cauſam CK, DL, EM, &c. erunt preſſiones, quas particula A ſubit a ſequentibus aliis columellis CD, DE, EF, &c. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, EM pergendo in infinitum, et particula B preſſiones omnes praeter primam AH, et particula C omnes praeter duas primas AH, BI; et ſic deinceps. Sed denſitas AH particulae primae A eſt (157) ad denſitatem BI particulae ſecundae B, ut preſſiones omnes, quas ſuſtinet particula prima A, ad omnes preſſiones, quas ſubit particula ſecunda B; er-

 go

go etiam A H erit ad B I, ut ſumma omnium A H, B I, C K, D L, E M, &c. ad ſummam omnium B I, C K, D L, E M, &c. Similiter denſitas B I particulae ſecundae B erit ad denſitatem C K particulae tertiae C, ut ſumma omnium B I, C K, D L, E M, &c. ad ſummam omnium C K, D L, E M, &c. Sunt igitur ſummae illae differentiis ſuis A H, B I, C K, &c. proportionales, atque adeo etiam (179) erunt continue proportionales, proindeque differentiae A H, B I, C K, &c., quae oſtenſae ſunt ſummis proportionales, erunt etiam continue proportionales. Unde cum denſitates in locis A, B, C, D, E, &c. expoſitae ſint rectis A H, B I, C K, D L, E M, &c. erunt hae quoque continue proportionales.

Corollarium I.

181. Quoniam locorum A, B, C, D, E, &c. diſtantiae T A, T B, T C, T D, &c. a vertice atmoſphaerae componunt arithmeticam progreſſionem, et aeris denſitates A H, B I, C K, D L, &c. in iiſdem locis, conſtituunt (180) geometricam progreſſionem; utique locorum diſtantiae a vertice atmoſphaerae erunt totidem logarithmi denſitatum aeris in eiſdem locis.

Corollarium II.

182. Et quia aeris denſitates in locis quibuslibet atmoſphaerae ſunt (157) ut preſſiones, quas ibi ſuſtinent ab omnibus columellis ſuperius incumbentibus, aut (148) ut elevationes mercurii in Barometro translato ad illa loca; ideo locorum diſtantiae a vertice atmoſphaerae erunt totidem logarithmi elevationum mercurii in iiſdem locis.

PROPOSITIO LXI.

183. *Datis in altitudine* I P (*Fig.* 42.) *atmoſphaericae columnae* I L *tribus locis quibuslibet* R, O, Z, *dataque etiam differentia* R Z *altitudinum primi* R, *et tertii* Z, *invenire pariter differentiam* O Z *altitudinum ſecundi* O, *et tertii* Z.

Barometro A D ſucceſſive translato ad loca R, O, Z, notentur in eo mercurii elevationes C F, C H, C E reſpondentes eiſdem locis; eruntque (182) tres rectae I R, I O, I Z logarithmi elevationum mercurii C F, C H, C E. Sed differentiae numerorum ſunt quamproxime proportionales differentiis logarithmorum, qui numeris his conveniunt; ergo F H erit ad H E, ut R O ad O Z, et componendo erit F E ad H E, ut R Z ad O Z. Sunt autem obſervatione datae primae duae F E, H E, et praeterea tertia R Z eſt (ex hyp.) etiam nota; igitur nota erit etiam quarta O Z, quae eſt quaeſita differentia altitudinum duorum locorum O et Z.

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM I.

184. Bouguerius (a) obſervavit, in Regno Peruano ſupra verticem R montis Pitchincha mercurium in Barometro elevari ad altitudinem CF poll. 15, lin. 11, hoc eſt lin. 191. Godinius pariter expertus fuit, mercurium Barometri tranſlati ad verticem O montis Chouſſay, manere ſub altitudine CH poll. 17, lin. $10\frac{1}{2}$, hoc eſt lin. $214\frac{1}{2}$, aut lin. $214\frac{5}{10}$, ſeu lin. $\frac{2145}{10}$. Rurſus idem Bouguerius invenit, mercurium Barometri in vertice Z montis Carabourou haerere ſub altitudine CE poll. 21. lin. $2\frac{3}{4}$, ſeu lin. $254\frac{3}{4}$, aut lin. $\frac{1019}{4}$. Denique per notas regulas geometricas detexit diſtantiam RZ inter vertices montium Pitchincha, et Carabourou eſſe hexapedarum 1208. Cum elevatio CE mercurii in vertice Z montis Carabourou ſit lin. $\frac{1019}{4}$, eius logarithmus IZ erit 2.4061142. Rurſus quia mercurii altitudo CF in vertice montis Pitchincha eſt lin. 191, eius logarithmus IR erit 2.2810334; unde ſi hunc logarithmum auferas a priori, prodibit differentia illorum RZ 0.1250808. Denique mercurii elevatio CH in vertice O montis Chouſſay eſt lin. $\frac{2145}{10}$, cuius logarithmus IO eſt 2.3314273. Si itaque hunc ſubduxeris a logarithmo IZ elevationis CE in monte Carabourou, prodibit eorum differentia OZ 0.0746869. Nunc fiat, ut RZ ad OZ, ſive ut 1250808 ad 746869, ita RZ expreſſa hexapedis 1208 ad quartum terminum proportionalem 722 $\frac{95}{100}$; hic dabit numerum hexapedarum contentarum in recta OZ, quibus vertex montis Chouſſay eſt altior vertice montis Carabourou. Haec autem inventa altitudinum differentia, ne per hexapedam quidem unam ab illa differt, quam Godinius ope menſurae geometricae adinvenit.

EXEMPLUM II.

185. Quaeritur numerus hexapedarum, quibus vertex montis Carabourou eſt inferior pago Alauſſy poſito ad radicem montis Chouſſay, ubi mercurius in Barometro haeret ſub altitudine poll. 21, lin. $1\frac{1}{4}$. Idem in hoc exemplo eſt calculus adhibendus, qui inſtitutus in primo fuit. Imprimis itaque logarithmus elevationis mercurii in pago Alauſſy ſubducatur a logarithmo elevationis mercurii in vertice montis Carabourou, ut prodeat reſiduum 0.0025648.

(a) Hiſt. de l'Acad. Roy. ann. 1753.

Deinde fiat, ut 1250808 ad 25648, ita hexapedae 1208 ad quartum terminum proportionalem $24\frac{78}{100}$; hic dabit numerum hexapedarum, quibus vertex montis Carabourou depreſſior eſt pago Alauſſy. Haec autem inventa altitudinum differentia quamproxime illi aequatur, quam Godinius per calculum geometricum adinvenit.

Scholion.

186. Ex his duobus exemplis patet, Barometri beneficio ſatis exacte determinari differentiam altitudinum inter propoſita duo loca. Sane, ut Bouguerius (a) inveniret altitudines editiſſimorum montium Cordelliere, admodum feliciter hanc regulam eſt ſequutus. Nam quo altior eſt locus, ubi Barometrum conſtituitur, eo minus turbatur aeris elaſticitas, minuſque propterea alteratur proportio (157) demonſtrata inter aeris denſitates, et pondera comprimentia. Verum in illis locis, quae non multum aſſurgunt ſupra libellam maris, tuto nequit haec regula adhiberi. Cum enim ibi aeris elaſticitas a radiorum ſolarium reflexione, et ab exhalationibus e tellure erumpentibus immutetur; preſſiones, quas ſubit aer in illis locis, non erunt amplius proportionales ponderibus comprimentibus. Propterea ſi Bouguerius hac methodo quaeſiviſſet altitudines etiam mediorum montium Cordelliere, eas inveniſſet multum diverſas ab illis eſſe, quae per menſuram geometricam inferuntur.

PROPOSITIO LXII.

187. *Si Barometro delato ex loco* Z *ad* O, *mercurius deſcendat ex* E *in* H, *et eo translato ad locum* R, *deſcendat rurſus ex* H *in* F; *gravitas ſpecifica mercurii erit ad ſpecificam gravitatem aeris contenti in columna* RS, *ut differentia* RO *altitudinum* RP, OP *ad differentiam* HF *altitudinum mercurii* HC, FC *in locis* O, *et* R.

Columna HD eiuſdem eſt (148) ponderis cum alia IS. Sed etiam columna FD (148) aeque gravis eſt ac IV; ergo reliqua columna HK eiuſdem erit ponderis cum reliqua columna RS. Sed quando duo corpora ſunt aequaliter ponderantia, gravitates ſpecificae ſunt (27) reciproce ut volumina eorundem; ergo gravitas ſpecifica mercurii erit ad ſpecificam gravitarem aeris contenti in columna RS, ut columna RS ad columnam HK. Sed columna RS eſt ad columnam HK, ut RO ad HF; ergo etiam gravitas ſpecifica mercurii erit ad ſpecificam gravitatem aeris contenti in columna RS, ut RO ad HF.

Scho-

a) L'Hiſt. de l'Acad. Roy. ann. 1743.

Digitized by Google

Scholion.

188. Hoc theorema ſolummodo verum eſt, quando diſtantia RO locorum O, et R valde parva eſt prae altitudine atmoſphaerae, quo ſolum in caſu aer columna RS contentus, cenſeri poteſt (168) ut fluidum homogeneum.

PROPOSITIO LXIII.

189. *Si translato Barometro ad locum* O, *mercurius deſcendat ex* E *in* H, *et eo poſtea delato ad locum* R, *deſcendat rurſus ex* H *in* F; *erit* EH *ad* EF, *ut* OP *ad* RP.

Pondus columnae ED idem eſt (148) cum pondere columnae IL. Sed etiam pondus columnae HD eſt (148) idem cum pondere columnae IS; ergo etiam pondus columnae EG aequabitur ponderi columnae OL. Sed pondus columnae HK eſt idem (187) cum pondere columnae RS; ergo pondus columnae EK aequabitur ponderi columnae RL, et ita pondus columnae EG erit ad pondus columnae EK, ut pondus columnae OL ad pondus columnae RL. Sed pondus columnae EG eſt (20) ad pondus columnae EK, ut columna EG ad columnam EK, aut ut EH ad EF, et pondus columnae OL eſt (20) ad pondus columnae RL, ut columna OL ad columnam RL, ſive ut OP ad RP; ergo etiam EH erit ad EF, ut OP ad RP.

Scholion I.

190. In hoc pariter theoremate praeſupponitur, aerem contentum in columna RL, eſſe fluidum homogeneum, ſive altitudinem eius RP admodum parvam eſſe reſpectu altitudinis atmoſphaerae.

Scholion II.

191. Id etiam confirmant Valerii obſervationes (a) in fodinis cupreis profundiſſimis inſtitutae. Ipſe enim cum ab imo fodinae P aſcendiſſet ad locum O, 60 hexapedis altum, deprehendit mercurium deſcendiſſe per altitudinem EH 4 linearum. Cum autem denuo aſcendiſſet uſque ad locum R, 30 hexapedis altero O altiorem, comperit mercurium deſcendiſſe per altitudinem HF 2 linea-
rum

(a) Muſſchembroekii Tentamina Experimentorum naturalium captorum in Academia *del Cimento* pag. 52.

Digitized by Google

rum. Hoc autem poſito, erat EH ad EF, ut 4 ad 6, ſive ut 2 ad 3. Sed etiam OP erat ad RP, ut 60 hexapedae ad hexapedas 90, ſive ut 60 ad 90, aut ut 6 ad 9, ſive ut 2 ad 3; ergo etiam EH erat ad EF, ut OP ad RP.

DEFINITIO XII.

192. *Sipho* eſt cylindricus inflexus tubus BRCGV (Fig. 45.) ubivis aeque amplus, utraque ſui extremitate apertus, et conſtans cruribus CB, CV altitudine inaequalibus inter ſe. Hoc inſtrumento homines uti ſolent ad aquam, et vinum ex uno vaſe in inferius alterum derivandum.

PROPOSITIO LXIV.

193. *Vaſculo* ESOF (*Fig.* 45.) *aquae pleno immerſum ſit brevius crus* CB *Siphonis* BRCGV. *Dein admoto ore ad eius orificium inferius* VG, *ope ſuctionis aer contentus in Siphone educatur. Dico, quod aqua aſſurgens ex vaſculo, implebit tubum, et ſubinde remoto ore ab orificio, per hoc ſe exonerabit, uſque dum ſuperficies eius in vaſculo pervenerit ad* RB.

Superficies aquae ſtagnantis in vaſculo, ſit EF, et pars cruris CB, ipſi immerſa, ſit PRBH; eritque ſectio eius PH portio eiuſdem ſuperficiei horizontalis EF. Verticalis pariter recta KL referat pondus columnae aqueae, altae pedibus 33, et digitis 10, cuius baſis aequetur orificio VG, vel RB, aut PH, quod quidem pondus repraeſentabit (153) pondus maximum atmoſphaerae. Denique verticales rectae KM, KN referant preſſiones, quas aqua replens crura CB, CV, exerceret deorſum in ſuperficies eius inferiores PH, VG, quibus inſiſtit. Iam quia ope ſuctionis aer contentus in Siphone eſt eductus; pars PH ſuperficiei aquae EF nullam preſſionem deorſum ſubit. Sed reliquae aliae partes ſuperficiei aquae EF, ipſi PH aequales, premuntur deorſum ab externo aere vi KL; ergo aqua contenta in vaſculo ESOF, per orificium patens RB influet in crus CB, et promovebitur uſque ad C. Aqua autem perventa ad C, eius ſuperficies PH ſurſum urgebitur ab externo aere vi KL, deorſum vero ab aqua CPH ſollicitabitur vi KM; igitur attolletur reſidua vi ML, et ſic aqua perveniet ad VG. Tandem quia poſtquam aqua ad orificium VG pervenit, removetur os ab eodem; utique ſuperficies eius VG ſurſum urgebitur ab externo aere vi KL. Atqui ab aqua CGV deorſum ſollicitatur vi KN; igitur attolletur reſidua vi NL. Vis ergo attollens aquam in crure CB, eſt ML, et vis attollens aquam in crure CV,

eſt

eſt N L. Eſt autem M L maior quam N L; igitur cum vis minor maiori cedat, conſequens eſt, ut aqua crure C B contenta, tranſeat in aliud crus C V vi M N, aequali ſcilicet differentiae virium attollentium M L, N L. Unde aſſurgens aqua ex vaſculo E S O F, fluet per Siphonem B C V, et ſe exonerabit per orificium inferius V G, donec ſuperficies eius in vaſculo pervenerit ad R B.

Corollarium I.

194. Quare producta ſuperficie E F in I, aqua intra Siphonem promovebitur verſus G vi, quae aequatur preſſioni exercitae ab aquea columna I V in ſuperficiem V G. Aqua ſiquidem promovetur (193) intra Siphonem vi M N. Sed vis M N eſt (193) differentia preſſionum, quas aqua replens crura C B, C V, exerit in ſuperficies P H, V G; ergo aqua intra Siphonem promovebitur vi, quae aequatur differentiae harum preſſionum. Sed haec differentia eſt preſſio exercita a columna aquea I V in ſuperficiem V G; ergo aqua intra Siphonem promovebitur vi, quae aequatur preſſioni exercitae a columna I V in ſuperficiem V G.

Corollarium II.

195. Unde quo altior erit columna I V, ſive quo maior erit diſtantia orificii V G a ſuperficie E F, eo maiori vi aqua intra Siphonem promovebitur. Et ideo ſi orificium V G in eodem ſit plano cum ſuperficie E F; fluxus aquae in Siphone nullus erit.

Corollarium III.

196. Nullus ſimiliter eſſet fluxus, ſi diſtantia puncti C a ſuperficie E F aequaretur altitudini pedum 33, et digitorum 10. Tunc enim pars P H ſuperficiei E F ab aqua in crure C B contenta, premeretur deorſum vi, quae aequatur (153) ponderi atmoſphaerae, ſeu vi K L. Atqui pariter ſurſum premitur ab externo aere vi K L; igitur pars P H ſuperficiei aquae E F immota eſſet, et fluxus aquae in Siphone nullus foret.

DEFINITIO XIII.

197. *Antlia Suctoria*, aut *Aſpirans* eſt machina, cuius ope aqua ex loco inferiori attollitur in altiorem.

Scholion.

198. Haec machina conſtat 1.° ex duobus verticalibus tubis C A K B, T Z R S (Fig. 46.) in C B iunctis. Primus, qui immergitur aquae M N, *Aſpirans* dicitur, aut *Suctorius*; reliquus autem proprie

An-

Digitized by Google

Antlia nuncupatur, et terminatur a receptaculo QTSP, habente roſtrum DO, per quod hauſta aqua ex illo effluit. 2.° In plano CB, ubi hi duo tubi invicem uniuntur, valvula E ponitur, quae dum ſurſum impellitur, aperitur; dum autem deorſum premitur, claudi ſolet. 3.° Intra cavitatem antliae TZRS ponitur embolus coriaceus GV adnexus piſtillo X, quo deprimitur, aut attollitur; debet autem hic embolus ita implere antliae cavitatem, ut impediat quo minus aer ex cavitate ſuperiori tranſeat in inferiorem. 4.° Embolus iuxta ſui axeos directionem foramine L pertunditur, quod in parte ſuperiori eſt valvula F claudendum. 5.° Dum alternatim attollitur embolus, aut deprimitur; ipſe in itu ſuo, et reditu idem ſpatium IT abſolvere ſemper debet, adeo ut dum eſt in maxima depreſſione, congruat alteri plano horizontali IH. 6.° Diſtantia plani TS ab altero plano AK, ſive a ſuperficie ſtagnantis aquae MN, maior eſſe non poteſt pedibus 33, et digitis 10.

PROPOSITIO LXV.

199. *Aſcenſus aquae intra antliam ſuctoriam, ſeu aſpirantem producitur ab externi aeris preſſione.*

Dum embolus prima vice deprimitur a TS uſque ad IH, aer contentus in antlia TZRS, et tubo CAKB, eſt conſiſtentiae naturalis, atque adeo clauſae erunt valvulae F et E. Iam dum attollitur embolus ad TS, tunc valvula F preſſa a proprio pondere, et atmoſphaerico, etiamnum clauſa erit, et aer antea incluſus ſpatio CAKB, vi ſua elaſtica ſe expandet, et valvulam E aperiet, adeo ut hic aer, et ille, qui prius replebat ſpatium IZRH, ſe expandant in maius ſpatium TZCAKBRS. Igitur vis elaſtica aeris ſpatio hoc incluſi, minor erit (165) pondere atmoſphaerae. Sed aquae lamella AK premitur deorſum a vi elaſtica huius aeris, et contra premitur ſurſum a pondere atmoſphaerico; ergo cum minor preſſio maiori cedat, aqua intra tubum aſcendet uſque ad ak, ſive uſquedum vis elaſtica aeris redacti in ſpatium TZCakBRS, una cum pondere ſupenſae aquae aAKk aequetur ponderi atmoſphaerico. Si iterum embolus deprimatur, tunc aer incluſus ſpatio TZCakBRS, contrahetur in ſpatium minus IZCakBH, ideoque ob vim elaſticam eius auctam, valvulam F aperiet; contra vero valvula alia E tum propria gravitate, tum etiam preſſione aeris ſuperioris claudetur; unde aer contentus ſpatio IZRH, erit conſiſtentiae naturalis. Rurſus embolo elevato, valvula F claudetur, aerque iam antea rarefactus, et clauſus ſpatio CakB, denuo ſe expandet, et valvulam E aperiet, ita ut hic aer, et ille, qui antea occupabat ſpatium IZRH, acquirant maius ſpatium TZCakBRS.

Vis

Vis ergo elaſtica huius aeris, una cum pondere ſuſpenſae aquae a A K k minor erit pondere atmoſphaerico, atque ita ulterius aſcendet aqua uſque ad a'k'. Denique ſi aſcenſus, deſcenſuſque emboli repetantur, tandem aqua perveniet ad TS, et tunc in quavis emboli depreſſione aqua contenta ſpatio T I H S, ingredietur foramen L, et valvula F aperta, ſupra embolum attolletur. Dum autem embolus elevatur, aqua poſita infra ipſum, a preſſione externi aeris attolletur uſque ad TS, quae vero iam erat embolum praetergreſſa, ſimul cum embolo elevabitur, adeo ut tandem aqua impleat receptaculum QTSP, indeque efluat per DO. Ex quibus omnibus patet, aquam aſſurgere intra antliam ob exerni aeris preſſionem.

Corollarium.

200. Ut itaque aqua putei ingredi poſſit receptaculum QTSP, inferior baſis emboli conſtituti in maxima elevatione, ſive in plano TS, diſtare non debet a libella aquae MN intervallo maiori quam pedum 33, et digitorum 10. Aqua enim attollitur a plano libellae MN uſque ad planum TS per ſolam externi aeris preſſionem; ingreditur autem ex hoc plano in receptaculum QTSP per ſolam emboli depreſſionem, et elevationem. Sed aqua a plano libellae MN attolli nequit (153) uſque ad planum TS per ſolam externi aeris preſſionem, ſi diſtantia horum planorum ſit maior pedibus 33, et digitis 10; ergo etiam nequibit ingredi receptaculum QTSP, ſi inferior baſis emboli conſtituti in maxima elevatione, ſive in plano TS, diſtet a plano libellae MN intervallo maiori quam pedum 33, et digitorum 10.

Scholion.

201. Haec autem diſtantia pedum 33, et digitorum 10 ſolummodo locum habet, ubi mercurius in Barometro eſt (153) ſuſpenſus ad altitudinem digitorum 29. Caeterum ſi contingat, ut haec mercurii altitudo ſit digitorum 28; tunc etiam inferior baſis emboli conſtituti in maxima elevatione, non poterit diſtare a plano libellae MN intervallo majori quam pedum 32, et 8 digitorum. Imo in praxi haec diſtantia accipitur ſemper minor pedibus 32, et digitis 8, tum quia totus aer ex antlia educi nequit, tum etiam quia ad valvulam E attollendam, aliqua ſemper pars ponderis atmoſphaerici impendi debet.

PROPOSITIO LXVI.

202. *Ubi aqua e puteo hauſta, pervenit uſque ad receptaculi fundum* QL (*Fig.* 47.); *ſuperior baſis emboli conſtituti in maxima de-*

preſſione, deorſum premitur vi aequali ponderi columnae aqueae, cujus baſis eſt eadem quae emboli, et cuius altitudo aequatur diſtantiae plani QL *a plano libellae* MN.

Inferior baſis emboli in elevatione maxima conſtituti, congruat cum plano TS; in maxima vero depreſſione congruat cum alio plano IH, ita ut embolus in itu ſuo, et reditu ſemper ſpatium TI percurrat. Depreſſo nunc embolo ad IH, fiant primo duae columnae aqueae PF, P'F' alte pedibus 33, et digitis 10, quarum baſes GF, G'F' ſint reſpective aequales ſuperficiebus IH, AK. Deinde planum IH produci intelligatur in D et E', ut in columnis PF, P'F' fiant ſectiones DE, D'E'. Tandem producta DP in V, donec PV ſit ipſi TQ aequalis, ſuper baſi PZ, et altitudine PV conſtruatur aquea columna VZ, quae cum priori PF componat columnam VF. Aquae lamella AK (152) premitur ſurſum a pondere atmoſphaerae, hoc eſt a pondere columnae P'F'. Premitur autem deorſum ab aqua ICAKBH, hoc eſt (51) a pondere columnae D'F'; ergo ſurſum attollitur vi, quae aequatur horum ponderum differentiae, ſive a pondere columnae P'E'. Sed preſſio ſurſum exercita a pondere columnae P'E' in aquae lamellam AK, producit (75) in emboli baſim IH impreſſionem aequalem ponderi columnae aqueae, cuius baſis IH, et altitudo P'D'; hoc eſt aequalem ponderi columnae PE; ergo baſis IH emboli attolletur vi aequali ponderi columnae PE. Atqui haec eadem baſis emboli premitur quoque deorſum tum a pondere atmoſphaericae columnae incumbentis plano QL, tum etiam a pondere aqueae columnae QH, hoc eſt a ſumma ponderum columnarum PF, VE; ergo eadem baſis IH actu deprimitur vi, quae aequatur exceſſui ſummae ponderum columnarum PF, VE ſupra pondus columnae PE. Sed hic exceſſus eſt pondus columnae VE, cuius baſis GE aequalis eſt baſi emboli, et cuius altitudo VG aequatur diſtantiae plani QD a plano libellae MN; ergo inferior emboli baſis IH deorſum premitur vi aequali ponderi columnae aqueae, cuius baſis eadem eſt quae emboli, et cuius altitudo aequatur diſtantiae plani QL a plano libellae MN. Atqui inferior baſis emboli deorſum urgeri nequit, niſi eadem vi pariter urgeatur ſuperior eius baſis; ergo haec quoque debebit deorſum premi vi, quae aequatur ponderi columnae aqueae, cuius baſis eadem eſt quae emboli, et cuius altitudo eſt diſtantia plani QL a plano libellae MN.

Scholion.

203. In hac demonſtratione poſuimus baſim inferiorem IH emboli conſtituti in maxima depreſſione, deorſum premi tum a pondere columnae atmoſphaericae incumbentis ſuperficiei QL, tum etiam a ponde-

dere columnae aqueae QH, cum tamen pars aliqua huius columnae non quidem ab aqua, ſed ab embolo occupetur. Verum enim vero cum embolus ex ligno, et corio componatur, eius pondus vix differt a pondere aquae, quae ſub eius volumine contineretur; unde eius baſis IH ſpectari poterit velut preſſa tum a pondere columnae atmoſphaericae, ſuperficiei QL incumbentis, tum etiam a pondere aqueae columnae QH.

Corollarium I.

204. Hinc ſi potentia aequivalens ponderi columnae aqueae, cuius baſis eadem eſt quae emboli, et cuius altitudo eſt diſtantia plani QL a plano libellae MN, ope piſtilli conetur depreſſum embolum elevare a plano IH ad planum TS; dabitur inter ipſam, et embolum aequilibrium.

Corollarium II.

205. Ut igitur haec potentia queat embolum elevare, nonnihil augenda erit, tum ut imprimat motum embolo, tum etiam ut ſuperet reſiſtentiam frictionis, quam idem embolus pati ſolet, radendo cavam antliae ſuperficiem.

Digitized by Google

MECHANICAE FLUIDORUM

PARS ALTERA

CAPUT I.

De motu fluidi ex vaſe per foramen aliquod effluentis.

DEFINITIO I.

206. HYdraulica eſt ſcientia, quae agit de motu corporum fluidorum.

PROPOSITIO I.

207. *Si fundus* B D (*Fig.* 52.) *vaſis cylindrici* A B D H *fluido immoto pleni, repente auferri concipiatur, ita ut libere cadat fluidum; toto tempore huius lapſus particulae inferiores nullam preſſionem a ſuperioribus ſuſtinebunt.*

Quia fundo B D manente, particulae fluidi inferiores ab omni deſcenſu prohibent ſuperiores; illae ab integro harum pondere premi debent. At ſi fundus B D repente auferri concipiatur, ſingulae particulae fluidi tam ſuperiores, quam inferiores, utpote animatae ab aequali vi gravitatis, pari tempore per ſpatia aequalia cadent; ergo cum tempore huius lapſus particulae inferiores nullo modo impediant deſcenſum liberum ſuperiorum, nullam quoque preſsionem a ſuperioribus ſuſtinebunt.

COROLLARIUM I.

208. Hinc libere cadente fluido intra vas, eius particulae inferiores nullam omnino exerent preſſionem in alias particulas lateterales, et ſuperficiem internam vaſis. Quamdiu enim fluidum eſt immotum, eius particulae inferiores utpote preſſae a ſuperioribus, tanta vi (33) comprimeat laterales, et ſuperficiem internam vaſis, quan-

Digitized by Google

ta ipſae a ſuperioribus comprimuntur. Atqui dum libere cadit fluidum intra vas, particulae inferiores non amplius (207) a ſuperioribus comprimuntur; igitur neque ipſae prement alias laterales, et ſuperficiem internam vaſis.

Corollarium II.

209. Quia fundo BD ſublato, particulae omnes fluidi pari tempore per ſpatia (207) aequalia cadunt; habebunt omnes eandem velocitatem, eandemque propterea in deſcenſu ſervabunt diſtantiam inter ſe, quam quieſcentes habebant, ideoque tota fluidi columna AD vaſi incluſa, integra cadet, ut corpus ſolidum.

PROPOSITIO II.

210. *Si fluidum, quo repletur vas* ACDB (*Fig.* 53.) *ex hoc effluat per foramen* EG *infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis; velocitas, qua particulae fluidi initio motus intra vas deſcendunt, infinite parva erit, ſi comparetur cum illa, quam libere deſcendentes haberent.*

Concipe fluidum exiens per foramen, motu ſuo deſcribere rectam EF eodem tempore finito, quo, ſi fundus repente ſublatus eſſet, columna fluida vaſe incluſa, integra ut corpus ſolidum caderet (209) ex A in C, ſeu tota e vaſe exiret. Finge ulterius dum e foramine EG erumpit columna flluida EGHF, fluidum contentum vaſe, deſcendere per Aa, adeo ut ſuperficies eius ſuprema AB acquirat poſitionem ſibi parallelam ab. Cum velocitas fluidi a foramine erumpentis, non ſit infinita, eius ſpatium EF finito tempore abſolutum, infinitum eſſe non poteſt, et ideo idem erit aut finitum, aut infinite parvum. Atqui foramen EG per quod erumpit, eſt (ex hyp.) infinite parvum; ergo infinite parva erit etiam columna EGHF. Sed quia tempore, quo per foramen effluit columna EGHF, ſuperficies AB fluidi interni ACDB deſcendit (ex conſtr.) per Aa, et poſitionem ab acquirit, utique columna AabB aequabitur alteri EGHF; ergo infinite parva erit etiam columna AabB. Atqui huius columnae baſis AB eſt finita; ergo altitudo eius Aa erit infinite parva. Quando ergo foramen eſt infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis, particulae fluidi tempore finito intra vas deſcendunt per ſpatium Aa infinite parvum. Atqui ſi fundus BD repente ſublatus eſſet, ipſae eodem finito tempore (ex hyp.) deſcendiſſent per ſpatium AC finitum; ergo et velocitas, qua particulae fluidi initio motus intra vas deſcendunt, infinite parva erit, ſi comparetur cum illa velocitate, quam libere deſcendentes haberent.

Co-

Digitized by Google

Corollarium I.

211. Manente ergo foramine E G infinite parvo relate ad amplitudinem vaſis, particulae fluidi intra vas deſcendentes, initio motus habent ſolum infiniteſimam partem illius velocitatis, quam libere deſcendentes haberent.

Corollarium II.

212. Unde illarum velocitas impedita initio motus, poterit accipi ut aequalis velocitati, quam libere deſcendentes haberent.

Corollarium III.

213. Quare particulae inferiores initio motus cenſendae erunt veluti impedientes omnem deſcenſum ſuperiorum.

Corollarium IV.

214. Et ideo quando fluidum per foramen infinite parvum E G incipit profilire, fundi partes C E, G D, et vaſis latera A C, B D ſaltem per tempus infinite parvum quamproxime comprimentur illa eadem vi, qua premebantur, dum fluidum contentum vaſe immotum erat.

Scholion.

215. Quod hucuſque oſtenſum fuit de fluido erumpente per foramen inſculptum in vaſis fundo, convenit etiam fluido exilenti per orificium laterale, dummodo hoc ſit etiam infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis.

PROPOSITIO III.

216. *Fundo* C D *vaſis* A C D B (*Fig.* 54) *incumbat fluida lamella* M, *cuius baſis* E G *ſit infinite parva relate ad amplitudinem* A B *vaſis, altitudo autem eius* L E *infinite parva relate ad fluidi altitudinem* F E. *Tum ſumptis hinc inde ab illa aliis lamellis, veluti* O *et* N, *priori ſimilibus, et aequalibus, fiat in fundo vaſis foramen* E G, *ex quo emanet lamella* M. *Dico, quod toto illo tempuſculo, quo ipſa labitur per lineolam altitudini ſuae* L E *aequalem, lamellae reliquae* O *et* N *prementur deorſum a ponderibus columnarum* S E, H I.

Quia foramen E G eſt infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis, toto illo tempuſculo, quo lamella M labitur per lineolam altitudini ſuae L E aequalem, fundi partes P E, G I, atque adeo lamellae etiam O et N quamproxime comprimentur (214) illa eadem

vi

vi, qua premebantur, dum fluidum contentum vaſe, immotum erat. Atqui tunc premebantur nedum propriis ponderibus, verum etiam ponderibus columnarum S L, H V, quae eis incumbunt; ergo toto illo tempuſculo, quo lamella M labitur per lineolam altitudini ſuae L E aequalem, lamellae O et N premi deorſum debent non ſolum ponderibus propriis, ſed etiam ponderibus columnarum S L, H V. Sed pondera lamellarum O et N, una cum ponderibus columnarum S L, H V conficiunt pondera columnarum S E, H I; ergo toto illo tempuſculo, quo lamella M labitur per lineolam altitudini ſuae L E aequalem, lamellae O et N indeſinenter comprimi debent ponderibus columnarum S E, H I.

PROPOSITIO IV.

217. *Eadem lamella* M (*Fig.* 54.) *initio ſolum tempuſculi, quo labitur per lineolam altitudini ſuae* L E *aequalem, premitur deorſum a pondere verticalis columnae* F G; *ſubinde vero indeſinenter urgetur ad exitum per foramen a lamellis aliis lateralibus, veluti* O *et* N, *et quidem vi, quae aequatur ponderi eiuſdem columnae* F G.

Orificio F G manente clauſo, lamella M eſt in aequilibrio conſtituta, et ideo tanta vi premet vicinas alias O et N, quanta viciſſim hae illam premunt. Sed lamellae O et N comprimunt (33) aliam M ponderibus columnarum S E, H I, et lamella M illas premit pondere columnae F G; ergo pondera columnarum S E, H I aequivalebunt ponderi columnae F G. At orificio E G aperto, ſtatim cadit lamella M utpote preſſa a pondere columnae F G, et ſimul ceſſat (208) omnis eius preſsio lateralis in adiacentes alias O et N. Sed hae viciſsim cum premantur (214) adhuc a ponderibus columnarum S E, H I, iiſdem quoque compriment aliam M, eamque indeſinenter urgebunt ad exitum per foramen; ergo lamella M initio ſolum tempuſculi, quo delabitur per lineolam altitudini ſuae L E aequalem, deorſum premitur a pondere columnae F G, ſubinde vero urgetur ad exitum per foramen vi, quae aequipollet ponderi columnae F G.

Corollarium.

218. Ergo lamella M quamdiu vel tota, vel ex parte intra vas manet, indeſinenter urgetur ad exitum per foramen vi conſtanti, et aequali ponderi columnae F G.

PROPOSITIO V.

219. *Fundo vaſis* A C D B (*Fig.* 55.) *incumbat fluida lamella* M, *cuius baſis* E G *ſit infinite parva relate ad amplitudinem* A B *vaſis*, *alti-*

altitudo autem LE *infinite parva reſpectu altitudinis* FE *fluidi contenti in vaſe. Tum fiat in vaſis fundo foramen* EG, *per quod erumpat lamella* M. *Dico, quod haec toto illo tempuſculo, quo labitur per lineolam altitudini ſuae* LE *aequalem, ſive quo tota effluit per foramen, eam acquiret celeritatem, quam motu naturaliter accelerato acquirere poteſt poſt liberum deſcenſum a ſuprema fluidi ſuperficie ad foramen uſque.*

In ſuperiori parte columnae FEGH, quae foramini EG inſiſtit, accipiatur lamella FVSH, priori M ſimilis, et aequalis, quae proprio pondere animata, motu naturaliter accelerato ex altitudine FO cadat toto illo tempuſculo, quo prior lamella M preſſa (218) vi conſtanti, et aequali ponderi columnae FEGH, labitur per lineolam altitudini ſuae LE aequalem. Denique ſupra FE velut diametrum facto ſemicirculo FPQE, excitetur ex puncto O ad FE perpendicularis OR, et agatur chorda FR. Itaque hic interſunt duae conſtantes vires; una eſt pondus lamellae FVSH, altera vero pondus columnae FEGH, quibus agentibus in aequales lamellas FVSH et M, fit, ut hae tempore aequali deſcendant (ex hyp.) per ſpatia FO, LE. Atqui conſtantes vires, quae movendis maſſis aequalibus applicantur, proportionales (a) ſunt ſpatiis, quae ab eiſdem maſſis pari tempore abſolvuntur; ergo FO erit ad LE, ut pondus lamellae FVSH ad pondus columnae FEGH, ſeu (20) ut lamella FVSH ad columnam FEGH. Sed lamella FVSH eſt ad columnam FEGH, ut FV ad FE, vel (ex conſtr.) ut LE ad FE; ergo etiam FO erit ad LE, ut eadem LE ad FE, et ideo erit LE media proportionalis inter duas rectas FO et FE. Eſt autem inter has quoque media proportionalis chorda FR; ergo aequales erunt rectae LE, FR. Rurſus duae conſtantes vires ſunt (b) quoque proportionales celeritatibus, quas pari tempore aequalibus maſſis imprimunt; ergo celeritas acquiſita a lamella FVSH poſt lapſum liberum per FO, erit ad celeritatem acquiſitam ab alia lamella M tempuſculo, quo percurrit lineolam altitudini ſuae LE aequalem, ut pondus lamellae FVSH ad pondus columnae FEGH, ſive (ex demonſtr.) ut FR ad FE. Sed etiam velocitas acquiſita a lamella FVSH poſt (c) lapſum per FO, eſt ad velocitatem, quam acquirere ipſa poteſt poſt lapſum liberum per FE, ut FR ad FE; ergo velocitas acquiſita a lamella FVSH poſt lapſum liberum per FO, erit ad velocitatem acquiſitam a lamella M tempuſculo, quo abſolvit lineolam altitudini ſuae LE aequalem, ut velocitas acquiſita a lamella FVSH poſt lapſum liberum per FO, ad velocitatem, quam ipſa acqui-
re-

(a) In noſtra Mechanica prop. 20. §. 123. pag. 42.
(b) In noſtra Mechanica cor. 3. Legis II. §. 69. pag. 23.
(c) In noſtra Mechanica prop. 25. §. 138. pag. 50.

Digitized by Google

rere poteſt poſt lapſum liberum per F E. Unde velocitas acquiſita a lamella M tempuſculo, quo abſolvit lineolam altitudini ſuae L E aequalem, aequalis erit velocitati, quam lamella F V S H, vel M acquirere poteſt motu naturaliter accelerato poſt lapſum liberum per F E.

Corollarium I.

220. Ut ergo lamella M tempuſculo illo, quo abſolvit lineolam altitudini ſuae L E aequalem, acquirat velocitatem aequalem illi, quam acquirere poteſt grave poſt deſcenſum liberum a ſuprema fluidi ſuperficie ad foramen uſque, foramen E G, per quod effluit, debet eſſe infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis.

Corollarium II.

221. Et quia tempuſculum illud, quo lamella M abſolvit lineolam altitudini ſuae L E aequalem, eſt infinite parvum; patet, eandem lamellam M tempore infinite parvo, ſive in primo momento effluxus eam acquirere celeritatem finitam, quam acquirere poteſt grave poſt lapſum liberum per F E.

Scholion.

222. Neque mirum videri debet, lamellam M tempore infinite parvo acquirere finitam celeritatem. Si enim lamella M a proprio ſolum pondere animata, indeſinenter promoveretur, ipſa tempore infinite parvo acquireret ſolum velocitatem infinite parvam. Sed quia (218) indeſinenter ſollicitatur vi aequali ponderi columnae F E G H, quod infinities eſt majus pondere lamellae M, non eſt mirandum, ſi haec tempore infinite parvo velocitatem finitam adipiſcatur.

PROPOSITIO VI.

223. *Lateri vaſis* A C D B (*Fig.* 56.) *incumbat fluida lamella* N, *cuius baſis* O D *ſit infinite parva relate ad amplitudinem* C D *vaſis*, *altitudo autem eius* S D *infinite parva relate ad fluidi altitudinem* B D, *vel* F E. *Tum in vaſis latere* B D *fiat foramen* O D, *per quod erumpat lamella* N. *Dico, quod ipſa toto illo tempuſculo, quo percurret lineolam altitudini ſuae* S D *aequalem, indeſinenter ſollicitabitur ad exitum per foramen vi aequali ponderi columnae fluidae, cuius baſis eſt idem foramen* O D, *et cuius altitudo eſt* B D, *ſeu diſtantia eiuſdem foraminis a ſuprema fluidi ſuperficie.*

Quoniam orificium O D eſt (ex hyp.) infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis, puncta O et D infinite propinqua erunt, ideo-

Digitized by Google

que diſtantia centri gravitatis orificii O D a plano libellae A B, quamproxime erit rectae B D aequalis. Hoc autem praemiſſo, ita oſtenditur propoſitio. Foramine O D manente clauſo, operculum eius O D, atque adeo etiam lamella N extrorſum (63) premitur vi aequali ponderi columnae fluidae, cuius baſis eſt operculum idem O D, et cuius altitudo eſt diſtantia eius centri gravitatis a plano libellae A B, ſeu, quod idem eſt, recta B D; ergo foramine O D aperto, ſtatim lamella N utpote preſſa vi aequali ponderi huius columnae, incipiet egredi per foramen. Sed dum egreditur per foramen, non amplius premitur ab hac vi; ergo nec etiam premet lamellas alias laterales, ipſi ſimiles, et aequales, a quibus tangitur omni ex parte. Verum hae ex adverſo cum premantur adhuc (214) vi aequali ponderi columnae fluidae, cuius baſis O D, et altitudo B D; utique hac vi premere adhuc pergent lamellam N; ergo toto illo tempuſculo, quo lamella N abſolvit lineolam altitudini ſuae S D aequalem, indeſinenter urgebitur ad exitum per foramen vi, quae aequatur ponderi columnae fluidae, cuius baſis O D, et altitudo B D.

PROPOSITIO VII.

224. *Eadem lamella* N (*Fig.* 56.) *ſtatim ac tota effluxerit per foramen, eam acquiret celeritatem, quam motu naturaliter accelerato acquirere poteſt poſt lapſum per* B D, *aut* F E.

Fiat in fundo vaſis foramen E G alteri D O ſimile, et aequale, cui inſiſtat lamella M priori N ſimilis, et aequalis. Iam ſi foramine D O clauſo, alterum E G aperiatur, lamella M (218) urgebitur ad exitum per E G vi conſtanti, et aequali ponderi columnae F E G H. Similiter ex adverſo ſi foramine E G manente clauſo, aliud D O aperiatur, lamella N ſollicitabitur ad exitum per D O (223) vi conſtanti, et aequali ponderi columnae fluidae, cuius baſis D O, et altitudo B D. Sed haec columna aequatur columnae F E G H; ergo duae lamellae aequales M et N viribus conſtantibus, et aequalibus per reſpectiva foramina expellentur, ideoque aequales etiam altitudines ſuas L E, S D tempore pari abſolvent, et his percurſis, eandem acquirent celeritatem. Atqui lamella M poſtquam abſolvit altitudinem ſuam L E, acquirit (219) celeritatem, quam libere cadendo ex F E acquirere poteſt; ergo et alia lamella N poſtquam deſcripſerit altitudinem ſuam S D, ſeu ſtatim ac tota effluxerit per foramen, eam acquiret celeritatem, quam libere cadendo ex F E acquirere poteſt.

COROLLARIUM I.

225. Hinc ſi lamella N poſtquam e foramine tota evaſit, exci-

cipi

Digitized by Google

cipi intelligatur tubo cylindrico, et horizontali DOVK, eadem intra ipſum motu aequabili progredietur, et quidem cum illa velocitate, quam ipſa poſt lapſum liberum ex altitudine BD, vel FE acquirere poteſt. Velocitas haec aequabilis vocabitur deinceps *velocitas debita altitudini* BD, vel FE fluidi ſupra foramen OD.

COROLLARIUM II.

226. Quare ut lamella N, quae initio fluxus e laterali foramine DO exilit, ſtatim ac tota ex illo evaſit, acquirat velocitatem altitudini BD debitam, foramen DO debet eſſe infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis. Hanc proprietatem aquae fluentis per orificium in vaſis latere efformatum, detexit primum, et analytice demonſtravit Ioannes Bernoullius (a).

SCHOLION.

227. Probe autem eſt obſervandum, hanc legem ſaltem quamproxime, et in praxi habere locum, etiamſi foramen finitum ſit; dummodo tamen ſit valde parvum relate ad amplitudinem vaſis. Sane dum ratio foraminis ad amplitudinem vaſis vix maior eſt ratione 1 ad 20, docet experientia, aquam e foramine effluentem, ferme in momento poſt initium fluxus velocitatem altitudini eius debitam adipiſci. At ſi ratio foraminis ad amplitudinem vaſis notabiliter maior ſit ratione 1 ad 20; tunc aqua effluens per foramen, non niſi poſt tempus ſenſibile acquirit velocitatem altitudini ſuae debitam. Teſte enim Boſſutio (b), quantitas aquae primis tribus, aut quatuor minutis ſecundis e foramine illo effluens, eſt ſenſibiliter minor illa, quae ſolet tribus, aut quatuor aliis minutis ſequentibus emanare. Imo quo maius eſt orificium, eo fit ſenſibilior huiuſmodi differentia. Quae omnia invicte oſtendunt, aquam primis tribus, aut quatuor minutis ſecundis temporis ſui fluxus non adhuc velocitatem altitudini ſuae debitam acquiſiviſſe.

PROPOSITIO VIII.

228. *Iiſdem poſitis, prima lamella* N (*Fig.* 56.), *quae initio fluxus e vaſe emanat, per foramen* DO *tranſit motu uniformiter accelerato; ſecunda vero, omneſque aliae, quae ſequuntur, non item.*

I. Quamdiu lamella N, vel tota, vel aliqua ex parte intra vas manet, ipſa ſollicitatur ad exitum per foramen vi conſtanti, et aequali (223) ponderi columnae fluidae, cuius baſis eſt foramen

 ip-

(a) Tom. IV. Parte prima Diſſertationis Hydraulicae, artic. 10., pag. 402.
(b) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 2. artic. 242. pag. 254.

Digitized by Google

ipſum DO, et altitudo BD, vel FE; ergo per idem quoque tranſibit motu uniformiter accelerato,

II. Finge alias lamellas quoque effluentes poſt primam N, per foramen DO tranſire motu uniformiter accelerato. Iam prima lamella N in primo momento, ſive initio fluxus motu uniformiter accelerato (num. I.) abſolvit lineolam DI, altitudini ſuae SD aequalem, ſeu tota tranſit in locum R; interea vero fluidum verticale, et laterale, quibus agentibus illa ad exitum (223) urgebatur, confluet ad implendum locum N ab ea relictum. In ſecundo autem momento prima lamella N iam appulſa ad R, progreditur (225) motu aequabili, et abſolvit ſpatium IT duplum altitudinis ſuae SD, vel DI; unde eo momento elapſo, reperietur in loco Q. Atqui interea fluidum verticale, et laterale ad N appulſum, motu (ex hyp.) uniformiter accelerato abſolvit ſpatium DI altitudini ſuae SD aequale, ſeu totum tranſit in locum R; ergo intermedius locus P omni fluido vacuus remanebit, et ita effluxus aquae non erit continuus, contra experientiam. Falſo itaque ponebatur, quod ſecunda lamella fluidi, et ſequentes per foramen DO tranſirent motu uniformiter accelerato, veluti tranſit prima.

Corollarium I.

229. Unde tres quantitates fluidi R, P, Q invicem aequabuntur. Cum enim lamella Q eadem ſit omnino cum alia R appulſa ad locum Q; aequales erunt DI, ZT. Eſt autem IT (228) dupla ipſius DI; ergo et dupla erit ipſius ZT, ideoque aequabuntur IZ, ZT. Vidimus autem aequales eſſe etiam DI, ZT; igitur aequabuntur tres rectae DI, IZ, ZT, ac propterea et quantitates fluidi R, P, Q.

Corollarium II.

230. Ergo in ſecundo momento fluxus emanavit per orificium duplo maior quantitas fluidi, quam in primo. Nam in primo momento, et ſecundo ſimul exivit quantitas fluidi R, P, Q. Atqui in primo effluxit quantitas ſola Q; igitur in ſecundo emanavit quantitas reliqua R, P. Eſt autem (229) haec quantitas dupla alterius Q; ergo in ſecundo momento exivit quantitas fluidi duplo maior, quam in primo.

Corollarium III.

231. Quia in ſecundo momento fluxus emanavit ex orificio quantitas fluidi R, P, dupla (230) alterius Q in primo effluentis; utique ſecunda lamella, quae nempe in ſecundo momento effluxit per orificium, abſolvit ſpatium DZ, duplum ſpatii ZT, vel DI,

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO IX.

232. *Omnes lamellae fluidi, excepta prima* N, *tranſeunt per foramen cum illa velocitate, quam habet prima ſtatim ac tota e vaſe emerſit.*

Prima lamella N, quae in primo momento abſolvit ſpatium DI, poſtea in ſecundo, ſeu ſtatim ac tota e vaſe emerſit, percurrit ſpatium IT (228) duplum ipſius DI. Atqui ſecunda lamella, quae nempe in ſecundo momento effluit per foramen, abſolvit (231) ſpatium DZ, duplum ipſius DI; ergo hae duae lamellae in ſecundo momento abſolvunt aequalia ſpatia IT, DZ, atque ita eandem quoque habere debent celeritatem. Idem autem de aliis lamellis ſequentibus demonſtratur; igitur omnes tranſeunt per foramen cum illa velocitate, quam habet prima ſtatim ac tota e vaſe emerſit.

Corollarium.

233. Quia prima lamella N ſtatim ac tota e vaſe emerſit, habet aequabilem velocitatem (224) altitudini fluidi convenientem; etiam ſequentes aliae cum hac eadem aequabili velocitate per foramen tranſibunt.

Scholion.

234. Neque id mirum videri debet. Nam particulae fluidi verticales, et laterales ſtatim ac e vaſe expreſſerint primam lamellam N, eidemque communicaverint aequabilem celeritatem altitudini fluidi debitam; ipſaemet etiam ſucceſſive poſt illam cum hac eadem aequabili velocitate e foramine egredientur. Uno verbo, prima lamella N accelerat uniformiter ſuum motum cum tranſit per orificium; ſecunda vero, omneſque aliae inſequentes, accelerant ſuos motus antequam tranſeant per foramen, ideoque velocitate aequabili ex illo erumpunt.

PROPOSITIO X.

235. *Vaſi* ACIG (*Fig.* 57.) *inditus ſit liquor, cuius libella* AG. *Dein in latere eius* GI *fiat orificium* FI *infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis, per quod fluere poſſit liquor. Dico vim, quae in momento poſt initium motus liquorem animat ad effluxum, eſſe duplo maiorem pondere columnae fluidae, cuius baſis eſt* FI, *et altitudo* GI.

Digitized by Google

Vis, quae in primo momento, ſive initio motus liquorem animat ad effluxum, imprimit (224) liquori primae lamellae M velocitatem, quam ipſa acquirere poteſt, cadendo libere per GI. Vis autem illa, quae in ſecundo momento, aut in momento immediate poſt initium motus liquorem animat ad effluxum, imprimit (230) liquori prioris duplo illam eandem velocitatem. Atqui duae conſtantes vires, quae pari tempore aequales velocitates inaequalibus maſſis imprimunt, ſunt proportionales eiſdem maſſis; ergo vis, quae in primo momento, ſive initio motus liquorem animat ad effluxum, erit ad vim, quae in ſecundo momento, aut in momento immediate poſt initium motus liquorem animat ad effluxum, ut liquor primae lamellae M ad eius duplum, ſive ut 1 ad 2. Sed vis, quae in primo momento, ſive initio motus liquorem animat ad effluxum, aequatur (223) ponderi columnae fluidae, cuius baſis FI, et altitudo GI; igitur vis, quae in ſecundo momento, aut in momento immediate poſt initium motus, liquorem animat ad effluxum, erit duplo maior pondere columnae fluidae, cuius baſis FI, et altitudo GI.

Corollarium.

236. Ergo initio effluxus, ſeu quamdiu liquoris motus eſt (228) uniformiter acceleratus, vis ipſum animans ad effluxum, aequatur ponderi columnae fluidae cuius baſis FI, et altitudo GI; at in momento immediate poſt initium motus, hoc eſt quando iam liquor motum aequabilem (225) eſt adeptus, vis eum animans ad effluxum, aequatur (235) ponderi culumnae fluidae, cuius baſis FI, et altitudo 2 GI, ſeu dupla ipſius GI.

Scholion I.

237. De huius theorematis veritate diu multumque diſputatum eſt inter Comitem Riccatum, Danielem Bernoullium, Petrum Antonium Michelottum, atque Iurinum. Nam cum Newtonus in prima Principiorum ſuorum editione (a) ſtatuiſſet, vim, qua totus aquae exilientis motus generari poteſt, aequalem eſſe ponderi columnae fluidae, cuius baſis FI, et altitudo GI; in ſecunda poſtea editione vim illam duplo maiorem fecit, hoc eſt aequalem ponderi columnae fluidae, cuius baſis FI, et altitudo 2 GI. Priorem vis illius menſuram adverſus Comitem Riccatum, et Iurinum tuebatur (b) Daniel Bernoullius cum Petro Antonio Michelotto. Verum Daniel Bernoullius tandem poſteriori Newtoni ſententiae ita

(a) Libro ſecundo prop. 36. coroll. 2.
(b) Danielis Bernoullii Exercitationes Mathematicae pag. 30.

Digitized by Google

ita (a) ſuffragatur: *Iſta ſententia a me olim, et ab aliis fuit impugnata, et ab aliis rurſus confirmata. Nunc autem poſtquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus ſum, lis ita dirimenda mihi videtur, ut cum aquae ad motum uniformem pervenerint, quae quidem hypotheſis eſt* Newtoni, *tunc recte altitudine* 2 G I *vis illa definiatur; ſed ab initio fluxus, ubi velocitas adhuc nulla eſt, vis ſimplici altitudini* G I *reſpondeat*. Patet autem hoc convenire cum corollario praecedenti.

Scholion II.

238. Quae hactenus demonſtravi circa effluxum liquoris ex infinite parvo foramine erumpentis, eadem quamproxime, et in praxi verificantur, cum liquor effluit ex foramine valde parvo relate ad amplitudinem vaſis. Liquor enim ex orificio utroque fluens, pari ferme tempuſculo acquirit (227) aequabilem velocitatem altitudini ſuae debitam.

Scholion III.

239. Imo hactenus demonſtrata aeque habent locum, ſive liquor effluat per foramen inſculptum in vaſis latere, ſive in eius fundo; dummodo tamen utrumque ſit aeque parvum, et aeque diſtans a ſuprema liquoris ſuperficie. Nam in utroque caſu eadem prorſus eſt (217. 223) vis, quae liquorem animat ad effluxum.

CAPUT II.

De figura, et denſitate funiculi, aut venae fluidi per nudum foramen, aut per brevem tubulum effluentis.

Propositio XI.

240. *Vena liquoris e vaſe per orificium valde exiguum effluentis, non eandem ubique craſſitiem habet; ſed paullo infra foramen eſt gracilior, quam in foramine ipſo.*

Si particulae omnes fluidi per foramen tranſirent ſecundum rectam perpendicularem ad eius planum; ipſae, ſecluſa omni acceleratione orta a gravitate, venam cylindricam, aut priſmaticam efformarent. At quia earum plures a lateribus vaſis undique confluen-

(a) Danielis Bernoullii Hydrodynamica ſectione decimatertia, articulo nono pag. 283.

ſluentes, ad foramen (234) concurrunt, fieri omnino debet, ut obliquis motibus per hoc tranſeant, et curſum ſuum flectentes, conſpirent cum verticalibus ad efformandam venam fluidi exilientis, quae proinde paullo infra foramen gracilior erit, quam in foramine ipſo.

Scholion I.

241. Daniel Bernoullius (a) obſervavit, particulas cerae hiſpanicae cum aqueis permixtas, ita cum aqua moveri in cylindrico vaſe vitreo A C D B (Fig. 58.), ut quae imminent foraminis centro, per lineam verticalem H G deſcendant; aliae vero omnes hinc inde poſitae, motu propemodum verticali deſcendant primum per rectas M P, N Q fere uſque ad fundum C D, tumque curſum ſuum verſus foramen E F per lineas P E, Q F ſenſim inflectant. Similiter obſervavit, ob particularum obliquos motus ſecundum lineas P E, Q F, venam aquae exilientis prae foramine contrahi uſque ad *e f*, ubi gracilior redditur, quam in ortu circa foramen E F, poſteaque ad ſenſum eiuſdem ſemper diametri apparere. Haec autem contractio venae verticaliter effluentis, confundi nequit cum alia eiuſdem contractione, quae procedit a gravitate aquae e foramine iam egreſſae.

Scholion II.

242. Simile experimentum inſtituit etiam Boſſutius (b) in cylindrico vaſe vitreo A C E B (Fig. 59.), in cuius latere E B orificium E F valde parvum inſculptum erat. Siquidem obſervavit, aquam omni ex parte confluere ad foramen eadem lege, qua in Bernoulliano experimento ad horizontale foramen antea confluebat. Unde ex ſimili cauſa ſimilis quoque prodibat in effluente vena attenuatio, quae eo facilius oculis perſpiciebatur, quia locum non habebat altera venae attenuatio procedens a gravitate aquae ex foramine iam egreſſae. Propterea ſi quis vellet contractionem venae accuratius obſervare, id melius aſſequeretur, ſi venis horizontalibus per lateralia foramina effluentibus uteretur.

Scholion III.

243. Ioannes Alphonſus Borellus (c) omnium primus fuit, qui obſervaret hanc venae aquae contractionem, quam falſo tamen tena-

(a) Danielis Bernoullii Hydrodynamica ſectione quarta, articulo tertio, pag. 62.
(b) Traité Elémentaire d'Hydrodynamique Tom. I. pag. 240.
(c) De Motionibus naturalibus a gravitate pendentibus. Prop. 216. pag. 288.

Digitized by Google

nacitati partium aquae adſcribebat. Newtonus dein ulterius progreſſus eſt; cum enim effluxum aquae per foramen in tenui inſculptum lamina obſervaret, invenit (a) eius venam ſic contrahi ad diſtantiam ferme unius digiti a foramine, ut diameter foraminis eſſet ad diametrum contractae venae in ratione 25 ad 21. Haec autem ratio diametrorum non ita eſt accipienda, quaſi ipſa debeat venis omnibus convenire; iuxta enim Danielis Bernoullii experimenta (b), eadem ratio eſt eo maior, quo tenuior ſumitur lamina, cui foramen ineſt. Imo Marchio Polenus (c) etiam deprehendit, cum lamellae craſſities eſſet unius lineae, et aqua efflueret per foramen inſculptum in fundo vaſis, diametrum foraminis fuiſſe ad diametrum contractae venae, ut 26 ad 20, ſive ut 13 ad 10, aut ut 130 ad 100. Porro haec ratio iam propemodum ea eſt, quam habet 141 ad 100, ſeu radix quadrata binarii ad unitatem, nullusque dubito, quin differentia harum rationum inſenſibilis ſit futura, ſi lamina perforanda, tenuiſſima aſſumatur. Et ſane, Daniel Bernoullius (d) expertus fuit, dum aqua flueret per foramen in tenui lamina efformatum, cuius diameter erat linearum $4\frac{52}{125}$, diametrum foraminis fuiſſe ad diametrum venae contractae ferme ut 141 ad 100, ſive ut radix quadrata binarii ad unitatem, atque ita etiam foramen quamproxime fuiſſe ad ſectionem contractae venae, ut 2 ad 1. Similiter e contrario ratio, quae intercedit inter diametrum foraminis, et diametrum contractae venae, eo minor fieri deprehenditur, quo (e) maior eſt craſſities laminae, cui foramen ineſt, adeo ut tandem evadat ratio aequalitatis, et ita venae contractio ſenſibiliter evaneſcat (f), ſi foraminis nudi loco brevis tubulus cylindraceus ſubſtituatur.

PROPOSITIO XII.

244. *Manente eadem craſſitie laminae, cui foramen inſculptum eſt, contractio venae eſt eo minor, quo maior viciſſim eſt ratio foraminis ad amplitudinem vaſis.*

Iuxta experimentum Bernoullianum ſuperius (241) indicatum, 1.° particulae, quae foraminis centro imminent, deſcendunt in recta HG (Fig. 38.) perpendiculari ad eius planum, 2.° Particulae M et N hinc inde poſitae, et plano foraminis imminentes, initio cadunt per

L re-

(a) Philoſophiae naturalis Principia Mathematica lib. 2. ſect. 7. prop. 36.
(b) Danielis Bernoullii Hydrodynamica ſectione quarta, articulo ſeptimo, pag. 65.
(c) De Caſtellis articulo 38. 39.
(d) Hydrodynamica ſectione 4. pag. 79.
(e) Hydrodynamica ſect. 4. art. 3. pag. 64.
(f) Ioannis Poleni De Caſtellis art. 50. pag. 26.

Digitized by Google

rectas propemodum verticales M'P', N'Q', ſed ubi proximae fundo ſunt, ita curſum ſuum inflectunt, ut properent ad foramen per lineas P'S, Q'I obliquas ad ejus planum, 3.° Particulae M et N conſtitutae extra columnam foramini imminentem, cum propius ad fundum accedunt, ita mutant directionem, ut tranſeant per foramen ſecundum lineas PE, QF, ad eius planum magis obliquas quam praecedentes P'S, Q'I. 4.° Particulae tandem aliae quo magis remotae ſunt a columna foramini inſiſtente, eo maiori obliquitate tranſeunt per foramen. Hoc autem poſito, ſi concipias foramen EF augeri; utique hoc in caſu particulae M et N, quae prius magis diſtabant a columna foramini incumbente, modo ab illa minus diſtantes erunt, atque adeo per foramen tranſibunt eo minori obliquitate, quo maius factum foramen erit. Sed quo minus obliquus eſt motus particularum e foramine erumpentium, eo minus etiam (240) contrahi debet vena; ergo contractio venae eſt eo minor, quo maior eſt ratio foraminis ad amplitudinem vaſis.

COROLLARIUM I.

245. Si ergo foramen ita auctum fuerit, ut amplitudinem vaſis, aut fundi aequet, hoc eſt ſi ratio foraminis ad amplitudinem vaſis evadat ratio aequalitatis; tunc venae contractio erit omnium minima, ſive nulla. Et ſane, ſublato fundo, aqua inſtar columnae ſolidae (209) e vaſe erumpit.

COROLLARIUM II.

246. Cum eadem fiat (242) contractio venae, ſive orificium in vaſis latere ſit inſculptum, ſive in eius fundo; etiam contractio venae horizontalis e laterali foramine erumpentis, erit eo minor, quo maior erit ratio foraminis ad amplitudinem vaſis.

COROLLARIUM III.

247. Et quia aucto foramine laterali, creſcit ſimiliter eius ratio ad amplitudinem vaſis; ideo ſi foramen non fuerit valde parvum, contractio venae adeo parva erit, ut ſenſibiliter evaneſcat.

PROPOSITIO XIII.

248. *Vena aquae per foramen valde parvum exiliens, non ubique aequaliter denſa eſt; ſed denſitas eius creſcit pergendo a foramine uſque ad eius maximam contractionem.*

Sit EF (Fig. 60. 61.) orificium valde parvum in tenuiſſima lamina efformatum, per quod exiliat aquae vena EBDF; haec utique in *ef*, ſcilicet ad diſtantiam quaſi unius digiti a foramine,

Digitized by Google

ita contracta erit, ut diameter foraminis EF ſit (243) propemodum ad diametrum ſectionis ef, ut radix quadrata binarii ad unitatem. Dico, denſitatem aquae in ef maximam omnium eſſe, minimam in EF, et in intermediis locis mediam. Daniel Bernoullius (a) obſervavit, partem venae EefF ſemper eſſe turbidam, et opacam, et quidem magis turbidam, et opacam verſus EF, quam verſus ef; contra vero partem alteram eBDf eſſe pellucidam inſtar cryſtalli. Quaenam igitur eſſe poterit tam ſingularis phaenomeni huius cauſa? Certe haec nequit erui aliunde, quam ex theoria incomparabilis Newtoni, qui deſumit materiae opacitatem ex interruptione eius homogeneitatis, et diaphaneitatem ex uniformi eius continuatione. Itaque pars venae EefF idcirco eſt turbida, et opaca, quia minimae eius particulae ſunt amplis, et inordinatis meatibus interceptae, et ideo procul inter ſe diſtant; contra vero particulae aquae eBDf exiguos, et ordinatos meatus undique intercipiunt, et ideo maſſa fluida ex illis conſtans, homogenea eſt, lumini pervia, et pellucida. Atqui pars venae EefF eſt magis turbida, et opaca verſus EF, quam verſus ef; ergo minimae eius particulae prope EF erunt diſiunctae magis, quam prope ef, et ita denſitas venae creſcet pergendo a foramine EF uſque ad ef, ubi venae diameter eſt omnium minima.

Corollarium I.

249. Cum pars venae eBDf pellucida, et cryſtallo ſimilis videatur; eadem eſſe debet conſiſtentiae naturalis, aut ea praedita denſitate, quam naturaliter habet aqua.

Corollarium II.

250. Quia pars venae altera EefF particulas eo denſiores habet, quo ſunt ſectioni ef viciniores; eadem poteſt concipi velut conſtans ex tot numero filamentis convergentibus ad ef, quot ſunt aquae particulae, quae actu ſimul exeunt per EF. Unde tot continebuntur fluentis aquae particulae in ef, quot ſimul actu exeunt per EF.

Corollarium III.

251. Et quia eodem tempore tanta aquae copia effluit per ef, quanta per EF exit; patet, particulas eius quoque tranſire per ef cum ea velocitate, cum qua exeunt per EF.

Corollarium IV.

252. Et ideo cum particulae dum tranſeunt per EF, habeant (219. 224.) velocitatem altitudini aquae debitam; eandem quoque habebunt ipſae, cum tranſeunt per ef.

 Scho-

(a) Exercitationes Mathematicae pag. 69.

Digitized by Google

Scholion.

253. Newtonus (a) putavit, motum aquae iam e foramine EF egreſſae, etiamnum accelerari uſque ad ſectionem *ef*, ita ut velocitas in EF ſit ad velocitatem in *ef*, ſicuti viciſſim ſectio *ef* ad foramen EF. Hoc autem foret conſonum veritati, ſi aqua per totum ſpatium E*ef*F ea eſſet praedita denſitate, quam naturaliter ipſa habet; hoc enim in caſu ſolum velocitates fluentis aquae ſunt in ratione reciproca ſectionum. Verum cum venae denſitas eo magis creſcat, quo eſt proximior ſectioni *ef*; eadem, cum tranſit a foramine EF ad ſectionem *ef*, motu ſemper aequabili (251) ferri debet. Et ſane, ſi aquae velocitas in EF eſſet ad eiuſdem velocitatem in *ef*, ut viciſſim ſectio *ef* ad foramen EF; utique manente foramine EF, et aucta ſectione venae *ef*, etiam minueretur aquae velocitas in *ef*. Atqui ſi foramini EF brevis tubulus cylindraceus eiuſdem cum illo diametri applicetur, augetur ſectio venae *ef*, adeo ut ſenſibiliter fiat (243) foramini EF aequalis; igitur aquae vena tranſiens per hunc tubulum, haberet velocitatem minorem illa, qua aqua per nudum foramen exiliens promovetur. Sed Marchio Polenus (b) expertus fuit, venae velocitatem in hiſce duobus caſibus eſſe eandem; conſequens ergo erit, ut motus aquae foramen iam praetergreſſae, nullo modo prae foramine acceleretur.

PROPOSITIO XIV.

254. *Particulae quaedam aquae, dum per orificium valde parvum in tenui inſculptum lamina, e vaſe erumpunt, ita oblique dirigant ſuos curſus, ut arceant ab effluxu aliquas vicinarum.*

Si nullae aquae particulae impedirent exitum vicinarum, omnes (225) cum eadem celeritate altitudini aquae debita, e foramine proſilirent; ideoque eius vena ubique aequaliter denſa eſſet. Atqui dum aqua effluit per foramen, denſitas eius venae uſque ad certum limitem ſemper creſcit (248), ita ut prope foramen ſit longe minor, quam ubi vena habet maximam contractionem; ergo particulae quaedam aquae dum exeunt per foramen, arcent ab effluxu aliquas vicinarum. Hoc autem impedimentum non alia ex cauſa oriri poteſt, quam ab obliquis motibus earundem, a quibus etiam (240) contrahitur vena aquae; ergo particulae quaedam aquae dum effluunt per foramen, ita oblique dirigunt ſuos curſus, ut arceant ab effluxu aliquas vicinarum.

Co-

(a) Philoſophiae Naturalis Principia Mathematica lib. 2. ſect. 7. prop. 36.
(b) Ioannis Poleni Epiſtola ad Iacobum Marinonum.

Digitized by Google

Corollarium.

255. Unde quantitas aquae actu fluens per orificium dato tempore, erit minor illa, quae pari tempore per idem flueret orificium, ſi nullae eius particulae impedirent exitum vicinarum. Prima quantitas aquae dicitur *actualis*; ſecunda vero *theoretica* nuncupatur.

Scholion.

256. Boſſutius ſtatuit (a) quantitatem actualem aquae per quodvis foramen dato tempore effluentis, eſſe perpetuo ad theoreticam, ut 5 ad 8; verum, ni fallor, haec ratio in variis foraminibus eſt diverſa. Siquidem contractio venae mutari ſolet (243) tum ob auctam, vel diminutam craſſitiem laminae, cui foramen ineſt, tum etiam (244) ob auctam, vel diminutam diametrum orificii. Sed quantitas actualis aquae dato tempore effluentis, minuitur, vel augetur pro maiori, aut minori venae contractione; ergo et ratio quantitatis actualis aquae ad theoreticam in variis foraminibus eſt diverſa.

DEFINITIO III.

257. *Lumen tubi* eſt orificium, per quod aqua e vaſe exit, et tubum influit.

PROPOSITIO XV.

258. *Si loco foraminis nudi* E F (*Fig.* 60. 61.) *brevis tubulus cylindraceus eiuſdem cum illo diametri adhibeatur; filamenta aquae* E *e*, F *f*, *quae prius obliqua erant ad foraminis planum* E F, *ſicque contractam venam conſtituebant, nunc veluti attracta, et illecta a parietibus internis tubi, ſenſibiliter fient recta ad foraminis idem planum.*

Marchio Polenus (b) expertus fuit, quod ſi aquae vena, quae ex foramine nudo fluens, poſt exitum ab eodem gracilior futura eſſet, excipiatur brevi tubulo cylindraceo, cuius lumen foramini ſit aequale; tunc adeo intumeſcit, ut ſenſibiliter repleat cavitatem totius tubi. Vena igitur hoc in caſu fit ſenſibiliter cylindracea, ſive eadem diametro ubivis praedita. Atqui id nullo modo explicari poteſt, quam ſi dicatur filamenta obliqua, et convergentia E *e*,

F *f*,

(a) Traité Elémentaire d'Hydodynamique Tom. 1. artic. 359. pag. 33.
(b) De Caſtellis artic. 75. pag. 37.

Digitized by Google

Ff, veluti attracta, atque illecta a parietibus internis tubi, ſenſibiliter ſequi eorum ductum, et ſic reddi invicem parallela, atque ad foraminis planum recta; igitur filamenta aquae Ee, Ff, quae dum aqua e nudo foramine erumpebat, convergentia erant, et obliqua ad foraminis planum EF, fiunt poſtea ſenſibiliter parallela, et recta ad idem planum, ſi foraminis nudi loco tubulus cylindraceus eiuſdem cum illo diametri ſubſtituatur.

PROPOSITIO XVI.

259. *Quamvis dum aqua e vaſe in cylindraceum tubum tranſit, filamenta eius* Ee, Ff *(Fig. 60. 61.) ſenſibiliter recta ſint ad luminis* EF *planum; nihilominus tamen habent inſenſibilem adhuc obliquitatem.*

Teſte Poleno (a) vena aquae fluentis per brevem tubulum cylindraceum, eſt minus pellucida, atque adeo minus denſa, quam vena contracta aquae e nudo foramine proſilientis. Id quoque Boſſutius (b) expertus fuit; nam cum brevem tubulum cylindraceum, per quem fluebat aqua, clavi leviter percuſſiſſet, comperit aquae venam, quae accurate prius implebat tubum, ſubito ab internis eius parietibus ſeparari, et ad minorem diametrum ſe reducere. Hoc autem invicte probat, venam aquae per tubulum effluentis, denſitatem habere minorem illa, quam naturaliter habet aqua; unde dum ipſa e vaſe in tubulum tranſit, quaedam eius particulae impediunt quominus aliquae vicinarum in eundem tubulum ingrediantur. Atqui ipſae nequeunt impediri, niſi ab obliquis motibus particularum, ex quibus conſtant filamenta Ef, Ff; ergo haec quoque tubulum ingredientur cum aliqua ſaltem inſenſibili obliquitate, ideoque reipſa etiam contrahitur aquae vena, quae fluit per brevem tubulum cylindraceum, quamvis eius diameter a diametro luminis (c) tam parum differat, ut earum differentia nequeat humamanis ſenſibus internoſci.

COROLLARIUM I.

260. Hinc aqua effluente per brevem tubulum cylindraceum, filamenta Ee, Ff, minus obliqua erunt, quam cum e foramine nudo exilit; ideoque in primo caſu plures aquae particulae liberum habebunt exitum (254), et in altero pauciores. Quare per brevem tubulum cylindraceum plus aquae tempore dato fluet, quam per nudum foramen; quamvis diameter luminis eiuſdem tubuli diametro

(a) De Caſtellis art. 51. pag. 27.
(b) Traité d'Hydrodynamique Tom. 2. art. 401. pag. 63.
(c) Epiſtola Ioannis Poleni ad Iacobum Marinonum.

Digitized by Google

tro foraminis ſit aequalis; quamvis altitudo aquae ſupra centrum luminis ipſius tubuli, ſit aequalis altitudini aquae ſupra foraminis nudi centrum; quamvis aqua fluat cum eadem velocitate (225) per tubulum, et per foramen.

Corollarium II.

261. Quia dum aqua e vaſe influit tubulum, quaedam eius particulae ſunt aliquibus impedimento, ne ipſae quoque eundem tubulum ingrediantur; quantitas aquae fluentis per tubulum cylindraceum, erit perpetuo minor illa, quae per ipſum pari tempore emanaret, ſi nullae eius particulae impedirent exitum aliarum, et ideo etiam in hoc caſu quantitas actualis fluentis aquae theoretica minor erit.

Scholion.

262. Boſſutius (a) putat, quantitatem actualem aquae per quemvis tubulum dato tempore effluentis, conſtanter eſſe ad theoreticam, ut 13 ad 16. Sed quoniam quantitates actuales aquae, quae per varios tubulos aequalium luminum tempore dato fluunt, ſunt invicem inaequales, ut in ſequenti theoremate demonſtrabitur; evidens eſt, quantitatem actualem non eſſe ſemper ad theoreticam, ut 13 ad 16.

CAPUT III.

De quantitate aquae per nudum foramen, aut brevem tubulum dato tempore effluentis, deque eius vi pariter, qua exilit.

PROPOSITIO XVII.

263. *Ut definiatur quantitas aquae, quae per nudum foramen, aut tubum tempore dato fluit, non ſolum attendi debet foramen, aut tubi lumen, et aquae altitudo ſupra utriuſque centrum; ſed opus eſt etiam, ut attendatur tum craſſities laminae, cui foramen ineſt, aut longitudo ipſius tubi, tum etiam reliqua figura interna foraminis, aut tubi.*

Sagaciſſimus Polenus (b), ut inveniret quantitatem aquae, quae tempore dato per datum foramen, aut tubum fluere poteſt, ſequentia inſtituit experimenta in vaſe aqua conſtanter pleno ſub altitudine pedum 13 ſupra centrum foraminis, aut luminis tubi.

Pri-

(a) Traité d'Hydrodynamique Tom. 2. artic. 384. pag. 53.
(b) Epiſtola ad Iacobum Marinonum.

Digitized by Google

Primum experimentum habuit foramine rotundo diametri trium linearum in tenui ferrea bractea efformatum. Tempore autem minuti unius emanaverunt pollices aquae cubici 607.

Secundum experimentum inſtitutum fuit foramine rotundo diametri iam conſtitutae trium linearum in lamella ex orichalco, cuius craſſities vix quartam partem lineae ſuperabat. Huius autem craſſitiei dimidia pars intacta relicta fuit, dimidia autem reliqua pars deraſo, ut ita dicam, angulo, obtinebat figuram ſuperficiei fruſti coni recti, altitudinem habentis aequalem radio ſuae baſis. Cum vero ita poſita haec lamella eſſet, ut eius ſuperficies intacta cavitati vaſis reſponderet, tempore unius minuti effluxerunt pollices aquae cubici 627.

Tertium experimentum habuit eadem lamella, ſed poſita inverſo ſitu, adeo ut ſuperficies eius limata, cavitati vaſis reſponderet. Tempore autem unius minuti 713 pollices aquae cubici emanaverunt.

Quartum ut faceret experimentum, tubo cylindrico uſus eſt, tredecim lineis longo, et habente diametrum trium linearum. Tempore vero unius minuti fluxere pollices aquae cubici 809.

Quintum etiam inſtituit experimentum illo eodem tubulo, quem in quarto iam adhibuerat, ſed prius eum duabus lineis decurtandum curavit, eiuſque alterum orificium ſic introrſum limandum, ut referret figuram ſuperficiei fruſti coni ſimilem illi, quae iam (ut dictum eſt) lamellae inducta erat. Cum per hoc orificium aqua tubulum influebat, tempore unius minuti erumpebant pollices aquae cubici 889.

Sextum denique experimentum captum fuit eodem tubulo illo, ſed iterum quatuor lineis decurtato, atque adeo ſeptem lineas non excedente. Cum autem aqua orificio limato exciperetur, tempore unius minuti 905 pollices aquae cubici effluxerunt.

In his ergo experimentis diverſa quantitas aquae tempore dato effluxit; quamvis in omnibus diametri luminum aequarentur; quamvis altitudo aquae ſupra centra luminum eſſet eadem. Propterea non licebit aquae copiam definire, quae tempore dato per datum foramen, aut tubum exit, niſi prius determinetur tum craſſities laminae, cui foramen inſculptum eſt, vel longitudo ipſius tubi, tum etiam reliqua figura interna foraminis, aut tubi.

PROPOSITIO XVIII.

264. *Quantitas minor, aut maior aquae in ſex allatis experimentis dato tempore effluentis, ex eo procedit, quod filamenta fluentis aquae fuerint in venis aliquibus laxiora, et in reliquis conſertiora.*

In

In ſex allatis experimentis ſinguli iactus aquae ex lateralibus foraminibus, atque ex tubulis exilientes, eandem omnino habebant directionem, omneſque, Poleno teſte, eandem ſemper diſtantiam attingebant, ſive (ut ex conicis conſtat) eandem ſemper parabolam deſcribebant: quod indicat manifeſte, aquam in omnibus hiſce iactibus eandem quoque habuiſſe celeritatem. Quantitas ergo aquae dato tempore effluentis, non ideo maior, aut minor effecta eſt, quod eius velocitas maior, aut minor fuerit; ſed quia per lumina omnino aequalia, et aequali temporis intervallo in aliquibus experimentis confertiores, atque adeo plures, in aliis autem rariores aquae particulae emanaverunt, ac propterea filamenta fluentis aquae fuere laxiora in horum venis, in venis autem illorum confertiora. Et ſane, dum exit aqua e foraminibus lamellarum, eius filamenta ſunt pauciora; diameter enim contractae venae perſpicue eſt diametro foraminis valde minor. Cum vero e brevibus tubulis aqua emanat, tunc etſi diameter venae a diametro luminis tam parum differat, ut haec differentia non poſſit (258) ſenſibus internoſci, atque diſtingui; credibile eſt tamen in hiſce iactibus filamenta poſſe fieri confertiora. Si enim per aequalia lumina, et aequalibus velocitatibus in quinto experimento plus aquae effluxit ex tubulo quam in quarto, et in ſexto plus quam in quinto; quis putet in ſexto filamenta non fuiſſe confertiora quam in quinto, et in hoc pariter conferta magis quam in quarto? Patet ergo veritas propoſitionis.

PROPOSITIO XIX.

265. *Ex data quantitate aquae per datum lumen dato tempore effluentis, accurate nequit determinari velocitas uniformis, qua aqua ex eodem lumine exilivit.*

Nonnulli viri doctiſſimi, ut ex data quantitate aquae per datum lumen dato tempore effluentis, determinent velocitatem aequabilem, qua eadem exilivit, cylindrum aqueum ſibi fingunt, ſoliditate ſua aequalem quantitati aquae, quae tempore illo effluxit, et pro baſi habentem idem lumen, per quod erupit. Quo facto, ita inſtituunt ratiocinium. Quia quantitas data aquae aequatur (225) cylindro aqueo, cuius baſis eſt lumen datum; hic cylindrus habebit pro altitudine ſpatium illud, quod aqua tempore dato abſolvit cum illa velocitate aequabili, qua ex dato foramine exilivit. Sed ſi cylindri ſoliditas dividatur per eius baſim, in quoto altitudo eiuſdem prodit; ergo ſi quantitas data aquae dividatur per datum lumen, quotus inde emergens, erit ſpatium, quod aqua tempore dato abſolvit, atque adeo et uniformis eius velocitas invenietur. Verum ſi iuxta hanc methodum conformentur in ſex cylindros quan-

Digitized by Google

titates diverſae aquae, quae in ſex allatis experimentis intra minutum temporis effluxerunt, cylindri ſex inde orti, erunt ſoliditate invicem inaequales. Singuli autem habent aequales baſes, ſive aequalia lumina, ex quibus emanaverunt; ergo habebunt quoque altitudines inaequales, ac proinde aqua in ſex allatis experimentis diverſa celeritate ex ſingulis luminibus emanabit. Vidimus autem (264) aquae velocitatem in omnibus hiſce experimentis eandem eſſe; ergo ex data quantitate aquae per datum lumen dato tempore effluentis, accurate nequit determinari velocitas uniformis, qua ipſa ex eodem lumine exilivit.

Corollarium I.

266. Ergo ex conformatione quantitatis datae aquae in cylindrum, cuius baſis eſt lumen, ex quo eadem proſilivit, accurate oſtendi nequit, aquam ex eodem lumine effluxiſſe cum illa velocitate, quam grave motu naturaliter accelerato acquirere poteſt libere deſcendendo per eius altitudinem ſupra luminis centrum. Et ſane, iuxta Gulielmini experimentum (a), cum aqua ex vaſe efflueret per nudum foramen quadratum, cuius latus erat pars quarta unciae Bononienſis, et aquae altitudo ſupra illius centrum permaneret conſtanter ſub altitudine pedum Bononienſium 3, unciarum $10\frac{7}{8}$, ſeu pedum Pariſinorum 4, pol. $3\frac{36}{41}$; tanta quantitas aquae intra minutum primum ex eo effluxit, ut conformata in priſma rectum, cuius baſis foramini aequabatur, eius altitudo eſſet pedum Bononienſium 427, unciarum $9\frac{11}{393}$, ſeu pedum Pariſinorum $500\frac{3}{4}$. Velocitas autem acquiſita a gravi poſt lapſum liberum ex altitudine pedum Pariſinorum 4, pol. $3\frac{36}{41}$, eſt huiuſmodi, ut cum illa grave intra minutum ſecundum abſolveret aequabiliter pedes Pariſinos 16, pol. 8, lin. 2, vel intra minutum primum pedes Pariſinos 964; ergo velocitas aquae e foramine effluentis, quae ex allato experimento infertur a Gulielmino, erit ferme duplo minor illa, quam acquirere poteſt grave libere deſcendendo ex altitudine aquae ſupra foraminis centrum, et ideo eius Tabulae, in quibus notari ſolent velocitates altitudinibus datis convenientes, manifeſte a veris differunt. Quapropter iuxta Gulielmini experimentum concludi debet, aquam effluere per foramen cum ea velocitate, quam acquirere poteſt grave libere cadendo ex quarta parte altitudinis aquae ſupra foramen. Quinimo ſi altero Mariotti experimento (b) fides habenda eſt, aqua effluit per foramen cum illa velocitate, quam acquirere poteſt grave libere cadendo per dimidiam altitudinem aquae ſupra foramen.

Co-

(a) Appendice alla Miſura delle Acque correnti.
(b) Traité de mouvement des eaux par. 3. diſcours 3. pag. 426.

Digitized by Google

Corollarium II.

267. Accurata igitur eſſe nequit Muſſchenbroekii demonſtratio (a) innixa ſexto Poleni experimento, qua nempe oſtendere conatus fuit aquam ex dato lumine exilire cum illa velocitate, quam grave acquirere poteſt cadendo ex eius altitudine ſupra luminis centrum. Si enim ex aquae copia, quae in quovis ex quinque aliis experimentis unius minuti tempore emanavit, cylindrus efformaretur, habens pro baſi lumen, ex quo effluxit; inveniretur velocitas minor illa, quam grave acquirere poteſt poſt lapſum liberum ex altitudine aquae ſupra luminis centrum.

PROPOSITIO XX.

268. *Sint duo vaſa* AD, CK (*Fig. 62. 63.*) *aquae plena, et in eorum fundis inſculpta foramina* IF, GS *valde parva relate ad amplitudines eorundem, per quae effluere aqua poſſit. Deinde tanta aquae copia ſuperne infundatur utrique vaſi, quanta interim per foramina illa fluit, ita ut ſint conſtantes in vaſe utroque altitudines aquae* MI, NG. *Dico, velocitatem aquae fluentis per foramen* IF *eſſe ad velocitatem exilientis per foramen* GS, *ut radix quadrata altitudinis* MI *ad radicem quadratam altitudinis* NG.

Aqua ex foramine IF effluit (227) cum illa velocitate, quam motu naturaliter accelerato acquirere poteſt grave poſt lapſum liberum per MI. Similiter aqua per foramen GS exilit cum illa celeritate, quam motu naturaliter accelerato acquirere poteſt grave deſcendendo libere per NG; ergo quadratum velocitatis, qua exilit aqua per foramen IF, erit ad quadratum velocitatis, qua ipſa effluit per foramen GS, ut quadratum velocitatis a gravi acquiſitae poſt lapſum liberum per MI ad quadratum velocitatis a gravi acquiſitae poſt lapſum liberum per NG. Sed ſpatium MI eſt ad ſpatium NG, ut quadratum velocitatis acquiſitae a gravi poſt lapſum liberum per MI, ad quadratum velocitatis a gravi acquiſitae poſt lapſum liberum per NG; ergo et quadratum velocitatis, quam habet aqua exiens per foramen IF, erit ad quadratum velocitatis, qua aqua per foramen GS exilit, ut MI ad NG. Sed quando quatuor quantitates ſunt proportionales, etiam radices quadratae illarum ſunt proportionales; ergo et velocitas, quam habet aqua exiens per foramen IF, erit ad velocitatem aquae per foramen GS exilientis, ut radix quadrata altitudinis MI ad radicem quadratam altitudinis NG.

(a) Introductio ad Philoſophiam naturalem. Tom. 2. art. 1294. pag. 23.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXI.

269. *Iiſdem poſitis, velocitas aquae fluentis per foramen* I F; *erit ad velocitatem exilientis per foramen* G S, *in ratione ſubduplicata altitudinis* M I *ad altitudinem* N G.

Sumpta V I media proportionali inter altitudines M I, N G, erit M I ad V I, ut eadem V I ad N G. Sed quando tres quantitates ſunt continue proportionales, quadratum primae eſt ad quadratum ſecundae, ut prima ad tertiam; ergo etiam quadratum M I erit ad quadratum V I, ut M I ad N G. Sed quando quatuor quadrata ſunt proportionalia, etiam illorum radices ſunt proportionales; ergo etiam M I erit ad V I, ut radix quadrata altitudinis M I ad radicem quadratam altitudinis N G. Sed velocitas aquae fluentis per foramen I F eſt (168) ad velocitatem exilientis per foramen G S, ut radix quadrata altitudinis M I ad radicem quadratam altitudinis N G; ergo et velocitas prima ad ſecundam erit, ut M I ad V I. Sed quia tres rectae M I, V I, N G ſunt continue proportionales, eſt prima M I ad ſecundam V I in ratione ſubduplicata primae M I ad tertiam N G; ergo etiam velocitas aquae fluentis per foramen I F, erit ad velocitatem eiuſdem exilientis per foramen G S in ratione ſubduplicata altitudinis M I ad altitudinem N G.

Corollarium.

270. Ergo ratio, quam inter ſe habent radices quadratae altitudinum M I, N G, eadem erit (269) cum ratione ſubduplicata altitudinum earundem.

PROPOSITIO XXII.

271. *Si in duobus vaſis* A B C D, E F G L (*Fig.* 65. 66.) *altitudines conſtantes aquae* K H, M O *invicem ſint aequales, at ex adverſo foramina* H I, O P, *per quae aqua effluit, ſint inaequalia inter ſe; quantitates theoreticae aquae dato tempore ex utroque foramine effluentes, erunt in directa eorundem foraminum ratione.*

Velocitates aquae ex duobus foraminibus erumpentes, ſunt (269) in ratione ſubduplicata altitudinum eiuſdem aquae ſupra foraminum centra. Atqui altitudines aquae K H, M O (ex hyp.) ſunt aequales; ergo etiam velocitates aquae fluentis per foramina H I, O P, invicem aequabuntur, ideoque ſi per foramen H I tempore dato effluat aquae quantitas theoretica aequalis columnae K H I L, ex foramine alio O P erumpet quantitas theoretica aequalis columnae M O P S.

Sed

Sed columna KHIL eſt ad columnam aeque altam MOPS, ut foramen HI ad foramen OP; ergo et quantitates theoreticae aquae dato tempore exilientes per foramina HI, OP, erunt in directa eorundem foraminum ratione.

Scholion I.

272. Boſſutius (a) ſequenti methodo adinvenit, quantitates etiam actuales aquae ex inaequalibus foraminibus dato tempore effluentes, eſſe in directa eorundem foraminum ratione. In duabus lamellis, quarum craſſities aequalis erat medietati unius lineae Pariſinae, foramina duo inſculpſit, quorum unius diameter erat pollicum 2; diameter autem alterius pollicis 1. Has duas lamellas ita duorum vaſorum lateribus applicavit, ut foraminum centra a ſuprema aquae ſuperficie diſtarent pedibus 11, poll. 8, lin. 10. His autem poſitis, obſervavit tempore unius minuti ex primo foramine effluxiſſe pollices aquae cubicos 37203, ex altero autem pollices aquae cubicos 9281. Igitur quantitates actuales aquae tempore unius minuti per haec foramina effluentes, inter ſe erunt, ut 37203 ad 9281. Hi vero duo numeri ſunt quamproxime, ut 4 ad 1, ſive ut quadrata diametrorum, quibus praedita ſunt foramina, atque adeo etiam in eorundem foraminum ratione; igitur quantitates actuales aquae tempore unius minuti per haec foramina effluentes, ſunt quamproxime in directa eorundem foraminum ratione. Idem Auctor (b) facto ſubinde altero in duobus tubulis inaequalibus experimento, invenit quantitates actuales aquae per illos unius minuti tempore effluentes, quamproxime eſſe, ut tubulorum lumina, per quae effluunt.

Scholion II.

273. Nec mirum videri debet, quod quantitates actuales aquae tempore unius minuti per illa duo foramina effluentes, non fuerint accurate in directa foraminum ratione. Nam cum differentia foraminum, per quae fluebat aqua, eſſet notabilis; utique minor (244) erit contractio venae fluentis e foramine quadruplo quam ex ſimplo, atque adeo, proportione ſervata, paullo plus aquae tempore unius minuti debebat effluere per orificium quadruplum, quam per ſimplum. Idem de quantitatibus actualibus aquae per duos tubulos effluentibus eſt dicendum.

PRO-

(a) Traité Elementaire d' Hydrodynamique Tom. 2. art. 409. pag. 67.
(b) Traité Elementaire d' Hydrodynamique Tom. 2. art. 354. pag. 30.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXI.

269. *Iiſdem poſitis, velocitas aquae fluentis per foramen* IF; *erit ad velocitatem exilientis per foramen* GS, *in ratione ſubduplicata altitudinis* MI *ad altitudinem* NG.

Sumpta VI media proportionali inter altitudines MI, NG, erit MI ad VI, ut eadem VI ad NG. Sed quando tres quantitates ſunt continue proportionales, quadratum primae eſt ad quadratum ſecundae, ut prima ad tertiam; ergo etiam quadratum MI erit ad quadratum VI, ut MI ad NG. Sed quando quatuor quadrata ſunt proportionalia, etiam illorum radices ſunt proportionales; ergo etiam MI erit ad VI, ut radix quadrata altitudinis MI ad radicem quadratam altitudinis NG. Sed velocitas aquae fluentis per foramen IF eſt (168) ad velocitatem exilientis per foramen GS, ut radix quadrata altitudinis MI ad radicem quadratam altitudinis NG; ergo et velocitas prima ad ſecundam erit, ut MI ad VI. Sed quia tres rectae MI, VI, NG ſunt continue proportionales, eſt prima MI ad ſecundam VI in ratione ſubduplicata primae MI ad tertiam NG; ergo etiam velocitas aquae fluentis per foramen IF, erit ad velocitatem eiuſdem exilientis per foramen GS in ratione ſubduplicata altitudinis MI ad altitudinem NG.

COROLLARIUM.

270. Ergo ratio, quam inter ſe habent radices quadratae altitudinum MI, NG, eadem erit (269) cum ratione ſubduplicata altitudinum earundem.

PROPOSITIO XXII.

271. *Si in duobus vaſis* ABCD, EFGL (*Fig.* 65. 66.) *altitudines conſtantes aquae* KH, MO *invicem ſint aequales, at ex adverſo foramina* HI, OP, *per quae aqua effluit, ſint inaequalia inter ſe; quantitates theoreticae aquae dato tempore ex utroque foramine effluentes, erunt in directa eorundem foraminum ratione.*

Velocitates aquae ex duobus foraminibus erumpentes, ſunt (269) in ratione ſubduplicata altitudinum eiuſdem aquae ſupra foraminum centra. Atqui altitudines aquae KH, MO (ex hyp.) ſunt aequales; ergo etiam velocitates aquae fluentis per foramina HI, OP, invicem aequabuntur, ideoque ſi per foramen HI tempore dato effluat aquae quantitas theoretica aequalis columnae KHIL, ex foramine alio OP erumpet quantitas theoretica aequalis columnae MOPS.

Sed

Sed columna KHIL eſt ad columnam aeque altam MOPS, ut foramen HI ad foramen OP; ergo et quantitates theoreticae aquae dato tempore exilientes per foramina HI, OP, erunt in directa eorundem foraminum ratione.

Scholion I.

272. Boſſutius (a) ſequenti methodo adinvenit, quantitates etiam actuales aquae ex inaequalibus foraminibus dato tempore effluentes, eſſe in directa eorundem foraminum ratione. In duabus lamellis, quarum craſſities aequalis erat medietati unius lineae Pariſinae, foramina duo inſculpſit, quorum unius diameter erat pollicum 2; diameter autem alterius pollicis 1. Has duas lamellas ita duorum vaſorum lateribus applicavit, ut foraminum centra a ſuprema aquae ſuperficie diſtarent pedibus 11, poll. 8, lin. 10. His autem poſitis, obſervavit tempore unius minuti ex primo foramine effluxiſſe pollices aquae cubicos 37203, ex altero autem pollices aquae cubicos 9281. Igitur quantitates actuales aquae tempore unius minuti per haec foramina effluentes, inter ſe erunt, ut 37203 ad 9281. Hi vero duo numeri ſunt quamproxime, ut 4 ad 1, ſive ut quadrata diametrorum, quibus praedita ſunt foramina, atque adeo etiam in eorundem foraminum ratione; igitur quantitates actuales aquae tempore unius minuti per haec foramina effluentes, ſunt quamproxime in directa eorundem foraminum ratione. Idem Auctor (b) facto ſubinde altero in duobus tubulis inaequalibus experimento, invenit quantitates actuales aquae per illos unius minuti tempore effluentes, quamproxime eſſe, ut tubulorum lumina, per quae effluunt.

Scholion II.

273. Nec mirum videri debet, quod quantitates actuales aquae tempore unius minuti per illa duo foramina effluentes, non fuerint accurate in directa foraminum ratione. Nam cum differentia foraminum, per quae fluebat aqua, eſſet notabilis; utique minor (244) erit contractio venae fluentis e foramine quadruplo quam ex ſimplo, atque adeo, proportione ſervata, paullo plus aquae tempore unius minuti debebat effluere per orificium quadruplum, quam per ſimplum. Idem de quantitatibus actualibus aquae per duos tubulos effluentibus eſt dicendum.

PRO-

(a) Traité Elementaire d' Hydrodynamique Tom. 2. art. 409. pag. 67.
(b) Traité Elementaire d' Hydrodynamique Tom. 2. art. 354. pag. 30.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXIII.

274. *Si aqua contenta in vaſe* ABDK (*Fig.* 64), *modo ſit ſub conſtanti altitudine maiori* GI, *modo ſub minori* OI, *et in utroque caſu exiliat per foramen* IF *valde parvum relate ad amplitudinem vaſis; eius quantitas theoretica, quae tempore dato exilit in primo caſu, erit ad eiuſdem theoreticam quantitatem in caſu altero effluentem, ut radix quadrata altitudinis* GI *ad radicem quadratam altitudinis* OI.

Velocitas, qua aqua ſub altitudine conſtanti GI e foramine IF exit, eſt (268) ad velocitatem, qua aqua ſub altitudine conſtanti OI e foramine IF exilit, ut radix quadrata altitudinis GI ad radicem quadratam altitudinis OI. Sed quantitas aquae tempore dato fluens per foramen IF, dum manet aqua ſub altitudine GI, eſt ad quantitatem aquae interea exilientem ex foramine IF, dum aqua manet ſub altitudine OI, ut velocitas aquae fluentis in primo caſu, ad velocitatem eiuſdem in caſu altero exilientis; ergo et quantitas aquae dato tempore effluentis per foramen IF, dum aqua manet ſub altitudine HI, erit ad quantitatem aquae eodem tempore exilientem, dum ipſa manet ſub altitudine OI, ut radix quadrata altitudinis GI ad radicem quadratam altitudinis OI.

SCHOLION.

275. Quantitates etiam actuales aquae dato tempore ſub diverſis altitudinibus ex eodem foramine exilientes, eſſe inter ſe, ut radices quadratae altitudinum earundem, Boſſutius (a) ſequenti methodo adinvenit. In vaſis fundo inſculpſerat orificium, cuius diameter erat pollicis 1. Tum manente conſtanter aqua ſub altitudine pedum 9 ſupra foraminis huius centrum, invenit quantitatem actualem aquae unius minuti tempore effluentem, fuiſſe pollicum cubicorum 8135. Demum redacta aqua ad conſtantem altitudinem pedum 4 ſupra foraminis centrum, comperit quantitatem actualem aquae tempore unius minuti exilientem, fuiſſe pollicum cubicorum 5436. Eſt autem 8135 ad 5436 quamproxime in ratione 3 ad 2; igitur quantitates actuales aquae unius minuti tempore effluentes, erant quamproxime ut 3 ad 2. Eſt autem 3 ad 2, ut radix quadrata altitudinis 9 ad radicem quadratam altitudinis 4; igitur quantitates actuales aquae erant quamproxime, ut radices quadratae altitudinum aquae ſupra foraminis centrum. Similiter idem Auctor (b) lo-

(a) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 2. artic. 355. pag. 30.
(b) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 2. art. 410. pag. 68.

Digitized by Google

loco foraminis brevem tubulum ſubſtituendo, expertus fuit, quantitates actuales aquae ſub diverſis altitudinibus per eundem brevem tubulum dato tempore effluentes, eſſe ut radices quadratae altitudinum earundem.

Corollarium I.

276. Quia etiam velocitates, quibus aqua e foramine FI erumpit, ſunt (268) ut radices quadratae altitudinum GI, OI; patet, tam quantitates theoreticas, quam actuales aquae pari tempore ex foramine FI fluentes, eſſe ut velocitates, quibus effluunt.

Corollarium II.

277. Quonim ſumpta CI media proportionali inter altitudines GI, OI, eſt (269) GI ad CI, ut radix quadrata altitudinis GI ad radicem quadratam altitudinis OI; evidens eſt, quantitates aquae tam theoreticas, quam actuales pari tempore e foramine FI exilientes, eſſe quoque inter ſe, ut rectae GI, CI, atque adeo in hac pariter ratione (276) eſſe celeritates aquae ex eodem foramine effluentes.

PROPOSITIO XXIV.

278. *Vis, qua aqua ſub altitudine maiori* GI (*Fig.* 64.) *urgetur ad exitum per foramen, aut lumen tubi* IF, *eſt ad vim illam, qua ſub altitudine minori* OI *ad eundem exitum ſollicitatur, ut altitudo maior* GI *ad minorem* OI.

Vis, qua aqua manens ſub altitudine GI urgetur ad exitum per foramen, aut lumen tubi IF, eſt (235) duplo maior pondere columnae aqueae GIFE; vis autem, qua aqua manens ſub altitudine OI, ad eundem exitum animatur, eſt (235) duplo maior pondere columnae aqueae OIFM. Ergo prima vis erit ad alteram, ut duplum ponderis columnae GIFE ad duplum ponderis columnae OIFM, ſive ut pondus columnae GIFE ad pondus columnae OIFM, aut ut columna GIFE ad columnam OIFM, aut ut altitudo primae GI ad altitudinem ſecundae OI.

Corollarium I.

279. Quare ſi altitudines GI, OI fuerint, ut 4 ad 1; in eadem quoque ratione erunt vires, quibus aqua manens ſub altitudinibus GI, OI, ad exitum ſollicitatur per foramen, aut tubi lumen IF.

Co-

Corollarium II.

280. Unde ſi altitudo GI ſit quadrupla altitudinis OI; velocitas aquae fluentis ſub altitudine GI, erit dupla illius, qua exilit ſub altitudine OI. Sumpta enim CI media proportionali inter altitudines GI, OI; utique cum hae ſint (ex hyp.) ut 4 ad 1, erit GI ad CI, ut 4 ad 2, ſive ut 2 ad 1. Sunt autem vires (278) ut GI ad OI, et (277) velocitates ut GI ad CI; ergo dum vires ſunt ut 4 ad 1, celeritates erunt ut 2 ad 1, conſequenter vis quadrupla imprimit aquae duplam ſolum celeritatem.

Scholion.

281. Neque id paradoxi loco habendum erit. Nam quando aquae velocitas dupla eſt, dupla eſt etiam quantitas aquae tempore dato fluens. Sed quantitas dupla aquae ducta in duplam celeritatem, efficit quadruplam quantitatem motus; ergo quando aquae velocitas eſt dupla, quantitas motus in ea genita, erit quadrupla, ideoque non eſt mirandum, ſi poſtea vis quadrupla imprimat aquae duplam ſolum celeritatem.

CAPUT IV.

De temporum proportione, quibus diverſa vaſa cylindrica aquae plena, per aequalia, et inaequalia foramina evacuantur.

PROPOSITIO XXV.

282. *Si in duobus vaſis* ABCD, HIKL (*Fig.* 67. 69.) *tam altitudines conſtantes aquae* GE, OM, *quam foramina valde parva* EF, MN *magnitudine differant inter ſe; quantitates aquae* Q *et* S *dato tempore ex utroque foramine effluentes, erunt in ratione compoſita foraminum* EF, MN, *et radicum quadratarum altitudinum* GE, OM.

Finge intermedium vas alterum A'B'C'D' (Fig. 68.), habens altitudinem aquae G'M', ipſi GE aequalem, foramen autem M'N' eiuſdem prorſus diametri cum alio MN. Pone rurſus ex foramine hoc M'N' quantitatem aquae R effluere illo tempore, quo ex foraminibus aliis EF, MN reliquae Q et S exilierunt. Itaque cum in vaſis ABCD, A'B'C'D' aquae altitudines perpetuo ſint aequales, et foramina inaequalia; utique (271) Q erit ad R, ut foramen EF ad foramen M'N', vel ut foramen EF ad foramen MN. Rurſus quia in vaſis A'B'C'D', HIKL conſtantes aquae altitudi-

nes

nes ſunt mutuo inaequales, et foramina aequalia inter ſe; R erit (274) ad S, ut radix quadrata altitudinis G' M', vel G E ad radicem quadratam altitudinis O M. Atqui Q eſt ad S in ratione compoſita ex rationibus Q ad R, et R ad S; ergo etiam Q erit ad S in ratione compoſita foraminum E F, M N, et radicum quadratarum altitudinum G E, O M.

Corollarium.

283. Hinc quantitates aquae Q et S dato tempore effluentes, erunt inter ſe, ut factum ex foramine E F in radicem quadratam altitudinis G E ad factum ex foramine M N in radicem quadratam altitudinis O M. Et ideo ſi foramen E F ſit ad foramen M N, ut radix quadrata altitudinis O M ad radicem quadratam altitudinis G E; quantitates aquae Q et S aequales erunt.

PROPOSITIO XXVI.

284. *Si in duobus vaſis* A B C D, H I K L (*Fig.* 70. 71.) *altitudines conſtantes aquae* G E, O M *invicem ſint aequales, et foramina* E F, M N *magnitudine differant inter ſe; tempora, quibus quantitates aequales aquae ex foramine utroque fluunt, erunt in reciproca eorundem foraminum ratione.*

Ex foramine maiori E F fluat tempore T quantitas aquae Q, ex minori autem M N tempore alio T' exeat quantitas alia S, alteri Q aequalis. Dico, tempus T eſſe ad tempus T', ut foramen M N ad foramen E F. Finge enim ex foramine maiori E F, per quod tempore T effluxit quantitas aquae Q, modo tempore T' exire quantitatem aliam aquae R. Cum ergo aqua ex vaſe A B C D per foramen E F aequabili motu erumpat; quantitates eius diverſis temporibus effluentes, erunt ut tempora, quibus effluunt, ideoque T erit ad T', ut Q ad R, aut (ex hyp.) ut S ad R. Sed cum quantitates aquae S et R eodem tempore T' effluxerint per inaequalia foramina E F, M N, eſt (271) S ad R, ut M N ad E F; ergo etiam T erit ad T', ut M N ad E F, ſive tempora erunt in reciproca foraminum ratione.

Corollarium.

285. Manente ergo eadem altitudine aquae in vaſe, certa eius quantitas eo breviori tempore ex illo erumpet, quo maius erit foramen, per quod exiit.

PROPOSITIO XXVII.

286. *Tempora, quibus vaſa cylindrica* ABCD, EFNL (*Fig.* 72. 73.) *aequalium baſium, et altitudinum per inaequalia foramina* HI, OP *evacuantur, ſunt in reciproca eorundem foraminum ratione.*

Æquales aquae altitudines KH, MO divide in totidem partes indefinite parvas, velut K*k*, M*m*, quae ſingulae tam multitudine, quam magnitudine aequabuntur. Dein per puncta ſingula diviſionum duc plana vaſorum baſibus parallela, quae aquam divident in lamellas indefinite parvas, veluti A*ad*D, E*el*L, quae ſingulae etiam erunt multitudine, et magnitudine inter ſe aequales. Finge praeterea ſuperficies aquae AD, EL tempuſculis T et T' deſcendere per aequalia ſpatiola K*k*, M*m*. Pone denique his tempuſculis per inaequalia foramina HI, OP effluere quantitates aquae Q et S, quae neceſſario aequabuntur lamellis A*ad*D, E*el*L, atque adeo etiam inter ſe. His autem praemiſſis, ita oſtenditur propoſitio. Quia altitudines aquae KH, *k*H differunt inter ſe quantitate K*k* infinite parva, poterunt etiam pro aequalibus uſurpari. Sed eandem ob cauſam altitudines quoque MO, *m*O quamproxime aequabuntur; ergo totis tempuſculis T et T', quibus evacuantur lamellae aequales A*a* *d*D, E*el*L, ſive exeunt per foramina quantitates aequales aquae Q et S, aequales etiam aquae altitudines KH, MO pro conſtantibus ſunt habendae. Sed dum conſtantes aquae altitudines ſunt aequales, et foramina inaequalia, tempora, quibus effluunt quantitates aequales aquae, ſunt (284) in reciproca ratione foraminum eorundem; ergo etiam tempuſcula T et T', quibus evacuantur lamellae A*ad*D, E*el*L erunt in reciproca ratione foraminum HI, OP. Idem autem oſtendi poteſt de aliis etiam tempuſculis, quibus evacuantur reliquae aliae lamellae aquae in utroque vaſe ſibi invicem reſpondentes; igitur etiam tempora, quibus integra vaſa evacuantur, erunt in reciproca eorundem foraminum ratione.

PROPOSITIO XXVIII.

287. *Tempora, quibus vaſa cylindrica* ABCD, EFNL (*Fig.* 74. 75.) *aeque alta, et baſium inaequalium per aequalia foramina* HI, OP *evacuantur, ſunt in directa baſium ratione.*

Aquam contentam in utroque vaſe, divide in lamellas indefinite parvas, aeque multas, et aeque altas, veluti A*ad*D, E*el*L. Finge deinde ſuperficies aquae AD, EL deſcendere per ſpatiola K*k*, M*m* tempuſculis T et T'. Pone denique his tempuſcu-

lis

lis per aequalia foramina H I, O P effluere quantitates aquae Q et S, quae lamellis A *a d* D, E *e l* L reſpective aequales erunt. Iam quia, ut ſupra (286) oſtenſum fuit, totis tempuſculis T et T' altitudines aquae in vaſis ſenſibiliter non mutantur; utique ipſae adhuc remanebunt inter ſe aequales. Sed etiam foramina (ex hyp.) ſunt aequalia; igitur quantitates aquae Q et S erunt, ut haec tempuſcula T et T', quibus emanaverunt, et ideo in ratione quoque horum tempuſculorum erunt reſpondentes lamellae A *a d* E, E *e l* L. Sed hae lamellae utpote aeque altae, ſunt inter ſe ut earum baſes *a d*, *e l*, ſive ut cylindrorum baſes BC, FN; ergo etiam tempuſcula T et T', quibus hae lamellae evacuantur, erunt inter ſe ut cylindrorum baſes BC, FN. Idem autem oſtendi poteſt de aliis etiam tempuſculis, quibus evacuantur reliquae aliae lamellae aquae in utroque vaſe ſibi invicem reſpondentes; igitur etiam tempora, quibus integra vaſa evacuantur, erunt in directa harum baſium ratione.

PROPOSITIO XXIX.

288. *Si duo vaſa cylindrica* ABCD, EFNL (*Fig.* 76. 77.) *aequales habeant baſes* BC, FN, *diverſas autem altitudines* AB, EF; *tempora, quibus vaſa per aequalia foramina* H I, O P *evacuantur, erunt ut radices quadratae altitudinum eorundem.*

Aquae altitudines A B, E F ſint primo ut 4 ad 1. Tum aquam contentam utroque vaſe divide in lamellas indefinite parvas, et aequae multas, quarum ſingulae ſibi invicem reſpondentes, veluti A *a d* D, E *e l* L, erunt ut earum altitudines A *a*, E *e*, aut ut altitudines cylindrorum A B, E F, ſive ut 4 ad 1. Finge deinde ſuperficies A D, E L tempuſculis T et T' deſcendere per ſpatiola K *k*, M *m*. Pone denique his tempuſculis effluere per foramina H I, O P quantitates aquae Q et S, quae reſpective aequabuntur lamellis A *a d* D, E *e l* L, atque adeo inter ſe erunt, ut 4 ad 1. Iam quia ſuperius demonſtravi (286), altitudines aquae in vaſis ſenſibiliter non mutari totis tempuſculis T et T'; ipſae adhuc eſſe pergent ut 4 ad 1, et ideo velocitates, quibus aqua effluit per foramina, erunt (280) ut 2 ad 1. Cum igitur quantitates aquae Q et S ſint ut 4 ad 1, et velocitates quibus effluunt, ut 2 ad 1; ſequitur etiam tempuſcula T et T', quibus ipſae evacuantur, eſſe ut 2 ad 1, quia in tempore duplo, celeritate dupla, quantitas quadrupla evacuatur. Sunt autem lamellae A *a d* D, E *e l* L quantitatibus aquae Q et S aequales; ergo etiam tempora, quibus hae lamellae evacuantur, inter ſe erunt ut 2 ad 1. Idem autem oſtendi poteſt de temporibus etiam illis, quibus evacuantur lamellae aliae in utroque vaſe ſibi mutuo reſpondentes; igitur etiam tempora, qui-

Digitized by Google

bus vaſa evacuantur, erunt ut 2 ad 1. Eadem ratione ſi aquae altitudines A B, E F eſſent ut 9 ad 1, oſtenderetur tempora, quibus vaſa evacuantur, eſſe ut 3 ad 1; et ſi altitudines aquae forent ut 16 ad 1, tempora, quibus evacuantur, demonſtrarentur eſſe ut 4 ad 1. Propterea generatim tempora, quibus vaſa evacuantur, erunt ut radices quadratae altitudinum eorundem.

SCHOLION.

289. Hoc theorema a 's Graveſandio (a) ſequenti experientia confirmatur. Ex tenui metallo fiant tria vaſa cylindrica A B, C D, E F (Fig. 78), habentia aequales baſes, quorum altitudines A G, C M, E L ſint ut numeri 4, 3, 1. Deinde in fundis G B, L F inſculpta intelligantur aequalia foramina H et I, quae poſtquam vaſa fuerint aquae plena, eodem momento temporis aperiantur. Hoc autem facto, ſi aqua erumpens ex vaſe A B, excipiatur altero vaſe C D, hoc tempore illo implebitur, quo tertium E F evacuatur. Atqui vas C D continet tres quartas partes vaſis A B; igitur vaſe E F ſemel evacuato, remanebit adhuc evacuanda quarta pars reliqua vaſis A B. Haec autem evacuabitur illo tempore, quo iterum vas E F evacuatur; igitur vas E F bis evacuatur, dum A B ſemel, ideoque tempus, quo vas A B evacuatur, erit ad illud, quo evacuatur vas E F, ut 2 ad 1.

PROPOSITIO XXX.

290. *Planis horizontalibus ita dividere vas cylindricum* N S G O *(Fig. 79.) aquae plenum, ut eius partes planis hiſce interceptae, aequalibus temporibus per idem foramen* A *evacuentur.*

Vas N S G O, ſic dividatur horizontalibus planis H I, F L, K M, ut horum, et plani N O diſtantiae A B, A C, A D, A E a baſi S G ſint ut numerorum naturalium quadrata 1, 4, 9, 16. Dico, quantitates aquae N M, K L, F I, H G aequalibus temporibus per foramen A evacuari. Cum enim aquae altitudines A E, A D, A C, A B ſint ut 16, 9, 4, 1; tempora in quibus vaſa N G, K G, F G, H G evacuantur, erunt (288) ut illorum numerorum radices, ſive ut numeri naturales 4, 3, 2, 1. Atqui horum numerorum differentiae mutuo ſunt aequales; igitur etiam tempora, in quibus vaſorum differentiae N M, K L, F I, H G evacuantur, erunt aequalia inter ſe.

Co-

(a) Phyſices Elementa Mathematica lib. 3. cap. 9. art. 1644.

Digitized by Google

Corollarium.

291. Hinc ſuprema aquae ſuperficies NO temporibus aequalibus deſcendendo percurret altitudinis partes ED, DC, CB, BA, quae ſunt ut numeri impares 7, 5, 3, 1, ac propterea etiam aqua per foramen erumpet motu uniformiter retardato. Unde ſi aqua contenta in vaſe, ſit 16 pollicum cubicorum, eademque minutis quatuor evacuetur; in primo minuto effluent per foramen 7 pollices cubici, in ſecundo 5, in tertio 3, et in quarto 1.

PROPOSITIO XXXI.

292. *Sint duo vaſa aeque alta, et aquae plena, quorum unum ſit cylindricum. Fiant deinde in eorum fundis aequalia foramina valde parva, per quae fluere aqua poſſit. Demum dum vas cylindricum evacuatur, altitudo aquae in alio vaſe ſemper eadem perſeveret. Dico, tempore illo, quo integrum vas cylindricum evacuatur, effluere ex alio vaſe duplo plus aquae, quam ex cylindrico.*

Cum altitudines aquae in vaſis (ex hyp.) ſint aequales, eius quoque velocitates initio fluxus invicem (227) aequabuntur. Sed velocitas aquae, quae ex vaſe erumpit, eſt (225) aequabilis, velocitas autem eius, quae effluit ex cylindro, eſt (291) uniformiter retardata; ergo dum integrum vas cylindricum evacuatur, ex altero vaſe fluet aquae quantitas duplo maior, quam ex cylindrico. Nam ſi duo corpora eandem in ipſo initio motus habeant velocitatem, et primum motu aequabili progrediatur, ſecundum autem motu uniformiter retardato, et moveantur ambo, donec ſecundum amiſerit totum motum; primum in eo tempore percurret ſpatium duplo maius, quam quod abſolvitur a ſecundo. Atqui columnae aquae per aequalia foramina effluentes in tempore, in quo vas cylindricum evacuatur, pro ſpatiis percurſis haberi poſſunt; ergo columna aquae in hoc tempore ex vaſe fluens, erit dupla illius, quae interea effluit ex cylindro.

LEMMA.

293. *Datis vertice* A, *et axe* AF (*Fig.* 80.), *deſcribere parabolam biquadraticam* EAN, *in qua nimirum quadrata ordinatarum* FE, GO *ſint ut radices quadratae reſpondentium abſciſſarum* AF, AG.

Datis vertice A, et axe AF deſcribe primo apolonianam parabolam BAC, cuius ordinatae FB, GD, et abſciſſae AF, AG,

Dein-

Digitized by Google

Deinde inter duas rectas FB, GD quaere mediam proportionalem GH. Tandem ſecta utcunque FB in E, fac ut GH ad GD, ita FE ad quartam proportionalem GO. Dico, hoc punctum inventum O ad parabolam biquadraticam pertinere. Cum enim tres rectae FB, GH, GD ſint (ex conſtr.) continue proportionales; quadratum GH erit ad quadratum GD, ut FB ad GD. Sed quia (ex conſtr.) eſt GH ad GD, ut FE ad GO, etiam quadratum GH erit ad quadratum GD, ut quadratum FE ad quadratum GO; ergo et quadratum FE erit ad quadratum GO, ut FB ad GD. Sed in parabola BAC eſt FB ad GD, ut radix quadrata AF ad radicem quadratam AG; ergo et quadratum FE erit ad quadratum GO, ut radix quadrata AF ad radicem quadratam AG, et ideo punctum O ad biquadraticam parabolam pertinebit. Pari modo determinabis infinita alia puncta biquadraticae parabolae EAN.

PROPOSITIO XXXII.

294. *Parabola biquadratica* EAN (*Fig.* 81.) *circa immotum axem* AF *rotando generet cavum ſolidum* EAN. *Dein intra hoc vas affuſa aqua uſque ad* EN, *fiat in vertice eius* A *foramen aliquod valde parvum, per quod effluere poſſit aqua. Dico, manente hoc aquae effluxu, ſuperficiem eius ſupremam* EN *aequalibus temporibus deſcenſuram per aequales partes axis* AF.

Altitudine aquae AF diviſa in aequales partes indefinite parvas, velut F*f*, G*g*, per puncta ſingula diviſionum duc plana parallela ad ſupremam ſuperficiem aquae EN, quae aquam divident in lamellas indefinite parvas, et aeque altas, velut E*en*N, O*om*M. Finge praeterea illis tempuſculis, quibus ſuperficies aquae EN, OM deſcendunt per aequalia ſpatiola F*f*, G*g*, ſive evacuantur lamellae E*en*N, O*om*M, ex foramine A erumpere quantitates aquae Q et S, quae ipſis lamellis reſpective aequales erunt. Iam quia lamellae E*en*N, O*om*M altitudines habent infinite parvas, et aequales F*f*, G*g*; ipſae haberi poterunt ut cylindri totidem aeque alti, quorum baſes pro radiis habent rectas FE, GO, ideoque lamella E*en*N erit ad aliam O*om*M, ut baſis primae ad baſim ſecundae, ſive ut quadratum FE ad quadratum GO, vel (293) ut radix quadrata altitudinis AF ad radicem quadratam altitudinis AG. Sed quantitas aquae Q eſt ad quantitatem alteram S, ut lamella E*en*N ad lamellam O*om*M; ergo etiam quantitas aquae Q erit ad quantitatem aquae S, ut radix quadrata altitudinis aquae AF ad radicem quadratam altitudinis aquae AG, vel (269) ut velocitas, qua quantitas prima Q ex foramine A erupit, ad velocitatem, qua effluxit quantitas alia S, ideoque hae quantitates temporibus aequalibus ex eodem foramine A flu-

xe-

xerunt. Atqui dum quantitates aquae Q et S ex foramine A erumpunt, ſuperficies ſuprema aquae EN deſcendit per aequalia ſpatia Ff, Gg; ergo etiam eadem ſuperficies aequalibus temporibus deſcendit per aequales partes axis AF.

Corollarium.

295. Igitur aquae fluxus poterit accuratam menſuram temporis indicare. Nam ideo horologium ex rotis conſtans, menſuram exactam temporis repraeſentat, quia ſcilicet eius index circulariter ſic movetur, ut aequalibus temporibus per aequalia ſpatia promoveatur. Atqui etiam dum aqua ex foramine A erumpit, ſuperficies eius ſuprema EN ita deſcendit (294), ut aequalibus temporibus per ſpatia aequalia, ſeu per aequales altitudinis AF partes promoveatur; ergo eadem quoque poterit accuratam menſuram temporis indicare.

CAPUT V.

De velocitate aquae fluentis ex orificio laterali non valde parvo relate ad amplitudinem vaſis.

PROPOSITIO XXXIII.

296. *SI in latere* FD (*Fig.* 84.) *vaſis* ABDF *aqua pleni uſque ad* AF, *inſculptum fuerit orificium* ED *non valde parvum relate ad amplitudinem vaſis; ſingulae aquae particulae conſtitutae in foraminis plano* ED, *per hoc erumpent cum illa velocitate, quae convenit aquae altitudini ſuper illas.*

Finge orificium ED lamella aliqua ſolida clauſum eſſe. Finge praeterea hanc lamellam pertuſam eſſe aliquibus foraminibus infinite parvis relate ad amplitudinem vaſis. Hoc autem facto, ſi haec foramina ſeorſim conſiderentur, particulae aquae e ſingulis emanabunt (225) cum illa velocitate, quae convenit aquae altitudini ſuper illa. Iam ſi foraminum numerus multiplicetur in infinitum, adeo ut ſumma eorum fiat orificio ED aequalis; tunc ſingulae particulae in plano foraminis conſtitutae, ex eo erumpent cum illa velocitate, qua ex ſingulis foraminibus antea erumpebant. Atqui per ſingula haec foramina effluebant (225) cum illa velocitate, quae conveniebat aquae altitudini ſupra foramina eadem; ergo e foramine quoque ED erumpent cum illa velocitate, quae convenit aquae altitudini ſuper illas.

Scho-

Digitized by Google

Scholion.

297. Fatendum eſt autem totum hoc ratiocinium, quo determinantur velocitates particularum e ſingulis punctis foraminis effluentium, non continere exactam, et rigidam demonſtrationem. Nam quamvis aquae particulae effluentes e ſingularibus foraminibus infinite parvis relate ad amplitudinem vaſis, habeant (225) velocitates convenientes reſpectivis aquae altitudinibus ſuper illas; nihilominus tamen quando foraminum numerus multiplicatur in infinitum, et particulae aquae ex illis effluentes, invicem ſe contingunt, perſpicue non apparet, quod ipſae effluere debeant eodem modo, quo ſolent ex ſingulis foraminibus exilire. Et ſane, cum particulae velociores habeant ſaltem exiguam cohaeſionem cum inferioribus, quas contingunt; hae retardabunt illarum motus, et propterea non erumpent ex orificio cum accuratis illis velocitatibus, quae conveniunt earum diſtantiis a ſuprema fluidi ſuperficie. Quare ut omne dubium e medio tolli poſſit, ad experientiam erit unice recurrendum. Haec autem oſtendit (a), quod etſi foramen non fuerit valde parvum relate ad amplitudinem vaſis, particulae tamen aquae effluentes ex ſingulis eius punctis, quamproxime eam habent celeritatem, quae convenit altitudini ſuper illas.

Corollarium.

298. Hinc inter particulas foramini E D adſtantes, illae, quae ſunt contiguae puncto E, velocitate omnium minima egrediuntur; quae vero propinquae ſunt puncto D, velocitate omnium maxima exire ſolent; tandem reliquae intermediae eo minori, aut maiori exiliunt celeritate, quo ſunt puncto E, vel D proximiores.

Propositio XXXIV.

299. *In latere* I C Q B (*Fig.* 82.) *vaſis* S Q, *aqua conſtanter pleni uſque ad* S B, *ſit inſculptum foramen rectangulare* E G H F, *non valde parvum relate ad amplitudinem vaſis. Deinde producta* H F *uſque ad* N, *vertice* N *circa axem* N H *deſcribatur parabola* N K M, *eidemque ordinentur* F K, H M. *Dico, velocitates particularum aquae fluentium per puncta* F *et* H, *eſſe proportionales reſpondentibus ordinatis* F K, H M.

Particulae aquae poſitae in F et H proſiliunt (297) e foramine cum illis velocitatibus, quae conveniunt altitudinibus N F, N H, ſeu quas acquiſiviſſent libere deſcendendo per altitudines N F, N H; er-

(a) Traité Elémentaire d'Hydodynamique Tom. 1. artic. 243. pag. 256.

Digitized by Google

ergo velocitas primae erit ad ſecundae velocitatem in ratione ſubduplicata altitudinum aquae N F, N H, ſive (170) ut radix quadrata abſciſſae N F ad radicem quadratam abſciſſae N H. Sed etiam ordinata F K parabolae N K M eſt ad ordinatam H M, ut radix quadrata abſciſſae N F ad radicem quadratam abſciſſae N H; ergo et velocitas particulae effluentis per punctum F, erit ad velocitatem alterius proſilientis ex puncto H, ut ordinata F K ad ordinatam H M.

Corollarium I.

300. Igitur etiam ſpatia eodem tempore abſoluta a particulis proſilientibus ex F et H, erunt ut ordinatae F K, H M. Cum enim particulae fluentes per F et H, motu aequabili (225) progrediantur ſecundum rectas F K, H M; utique ſpatia, quae tempore aequali abſolvunt, erunt ut celeritates, quibus ea percurrunt. Sed celeritates particularum aquae fluentium ex F et H, ſunt (299) ut ordinatae F K, H M; igitur etiam ſpatia ab illis pari tempore abſoluta, erunt ut ordinatae F K, H M.

Corollarium II.

301. Propterea dum particula erumpens ex puncto F, motu ſuo percurrit ordinatam ſibi reſpondentem F K, altera quoque emanans ex puncto H, abſolvet (300) ordinatam ſibi reſpondentem H M.

Corollarium III.

302. Et ideo omnes ſimul aquae particulae emanantes ex verticali recta F H, motu ſuo deſcribent totidem ordinatas, quae ſimul ſumptae occupabunt ſpatium parabolicum F K M H, et quidem tempore illo, quo fluentes ex F et H percurrunt ſingulae ordinatas ſibi reſpondentes F K, H M.

Scholion.

303. Ex hac propoſitione colligi quidem poteſt ratio velocitatum, quas inter ſe habent duae particulae aquae ex eodem foramine erumpentes; at non determinantur abſolutae earum velocitates, quae non aliunde cognoſci poſſunt, quam per ſpatia ab illis intra minutum ſecundum temporis abſoluta. Ut vero etiam inveniantur abſolutae earum velocitates, prius cognoſci debet ſpatium illud, quod grave libere cadens, unius minuti ſecundi tempore emetitur. Illud autem ab Hugenio inventum fuit pedum 15 $\frac{1}{12}$. Quamvis autem hoc ſpatium ſit accurate ſatis determinatum; nihilominus tamen ut liberetur calculus a fractionibus, quae in praxi negligi tuto poſſunt, illud in poſterum ſtatuemus eſſe tantummodo pedum 15.

PROPOSITIO XXXV.

304. *Manente aqua in vaſe* SQ (*Fig.* 83.) *ſub altitudine conſtanti* NH *pedum* 15, *ſi vertice* N, *et parametro* NA *pedum* 60 *circa axem* NH *deſcribatur parabola* NKM; *ſingulae aquae particulae effluentes ex punctis quibuslibet, veluti* F *et* H, *foraminis* EFHG, *tempore unius minuti ſecundi abſolvent ordinatas ſibi reſpontes* FK, HM.

Cum ordinata HM ſit media proportionaſis inter abſciſſam NH pedum 15, et parametrum NA pedum 60; utique ipſa erit pedum 30, ſeu dupla altitudinis aquae NH. Iam particula emanans ex puncto H, progreditur uniformiter in recta HM cum ea velocitate. quam ipſa (296) acquiſiviſſet poſt lapſum liberum per NH, et ideo tempore huius lapſus aequabili motu abſolvet ſpatium duplum altitudinis aquae NH. Atqui ordinata HM eſt dupla altitudinis aquae NH; igitur eo tempore, quo particula emanans ex puncto H, libere caderet ex N in H, eadem aequabili motu abſolvet ordinatam HM. Sed cum NH ſit pedum 15, particula emanans ex puncto H, intra minutum ſecundum temporis caderet (303) libere ex N in H; ergo intra hoc tempus quoque aequabili motu abſolvet ordinatam HM. Atqui particula emanans ex puncto F, percurrit (301) ordinatam ſibi reſpondentem FK tempore illo, quo particula fluens ex puncto H, deſcribit ordinatam HM; ergo etiam particula erumpens ex puncto F, tempore unius minuti ſecundi abſolvet ordinatam ſibi reſpondentem FK.

COROLLARIUM I.

305. Quoniam particulae effluentes ex punctis quibuslibet F et H, tempore unius minuti ſecundi abſolvunt (304) ordinatas ſibi reſpondentes FK, HM; hae ſingulae (303) erunt reales, et abſolutae earum velocitates.

COROLLARIUM II.

306. Quare ſi aquae altitudo NH, quae eſt 15 pedum, diviſa concipiatur in 2160 aequales partes, quae totidem lineis aequabuntur, et ex punctis ſingulis diviſionum agantur totidem ordinatae in parabola NKM; prodibunt tabulae altitudinum, et velocitatum abſolutarum, eiſdem convenientium. Hae ergo tabulae continebunt duas columnas, in quarum prima deſcriptae erunt diſtantiae particularum aquae a ſuprema eius ſuperficie; in altera autem deſignabuntur abſolutae earum velocitates, aut ſpatia, quae ſingulae tempore unius minuti ſecundi velocitatibus his abſolvunt. Hac me-

Digitized by Google

methodo uſus eſt Belidorus (a), ut ſupputaret tabulas abſolutarum velocitatum, quas habent ſingulae aquae particulae e laterali vaſis foramine erumpentes.

Corollarium III.

307. Et quia cuivis altitudini aquae reſpondet in hiſce tabulis eius celeritas abſoluta, ideo data quavis altitudine aquae, ſtatim invenietur eius velocitas abſoluta; et contra, data abſoluta aquae velocitate, nota fiet eius pariter altitudo. Ita ſi diſtantia particulae a ſuperficie ſuprema aquae ſit ped. 3, pol. 11, et lin. 8, colliges ex tabulis eam ipſi competere velocitatem, qua unius minuti ſecundi tempore abſolveret ſpatium ped. 15, pol. 5, lin. 3. Et ſi aquae particula tempore unius minuti ſecundi abſolverit ſpatium ped. 17, poll. 3, lin. 10, ſtatim ex tabulis colligetur, eam eſſe ped. 5 infra ſuperficiem ſupremam aquae.

Scholion.

308. Quamvis haec doctrina videatur ſolum habere locum, quando aquae altitudo in vaſe eſt pedum 15, reipſa tamen generaliter vera eſt, quaecunque ſit altitudo eiuſdem aquae. Nam ſi pars aquae intercepta planis COV, LTQ (Fig. 83.), in glaciem verteretur, et reliqua pars SV adhuc fluida remaneret; particulae effluentes per puncta quaelibet F et I orificii reſidui ERIF, per haec tranſirent (296) cum eiſdem illis celeritatibus, quas habebant, dum aquae altitudo in vaſe erat NH. Atqui tunc ordinatae FK, IP (305) abſolutas earum velocitates repraeſentabant; ergo pariter illas referent, quando altitudo aquae in vaſe erit NI.

Propositio XXXVI.

309. *In latere* PCQB (*Fig.* 85.) *vaſis* SQ *aqua conſtanter pleni ſub altitudine* NH *pedum* 15, *fiat rectangulare foramen* EFHG *non valde parvum relate ad amplitudinem eiuſdem vaſis. Deinde vertice* N, *et parametro* NA *pedum* 60 *circa axem* NH *fiat parabola* NKM, *ordinenturque* FK, HM. *Demum producta* GE *in* O, *vertice* O, *et parametro* NA *circa axem* OG *alia deſcribatur parabola* OIL, *ductiſque ordinatis* EI, GL, *iungantur* IK, LM. *Dico, quantitatem aquae unius minuti ſecundi tempore effluentem, aequari ſolido parabolico* EFKILMHG, *cuius baſis eſt ſegmentum parabolicum* FKMH, *altitudo autem* FE.

Quia particulae effluentes per puncta foraminis F et H, tem-

 po-

(a) Architecture Hydraulique Tom. 1. art. 470. pag. 169.

pore unius minuti ſecundi abſolvunt (304) ordinatas ſibi reſpondentes FK, HM; utique minuti ſecundi tempore effluent ex illis punctis filamenta aquae FK, HM. Eandem ob cauſam, ex punctis pariter E et G intra minutum ſecundum temporis egredientur filamenta aquae EI, GL. Atqui idem oſtendi poteſt de aliis quoque filamentis, quae intra minutum ſecundum temporis effluunt per alia puncta foraminis EFHG; igitur ſumma omnium filamentorum intra minutum ſecundum temporis effluentium per totum foramen EFHG, integrum occupabit ſolidum EFKILMHG, ideſt quantitas aquae tempore hoc effluens, aequabitur ſolido parabolico EFKILMHG, cuius baſis eſt ſegmentum parabolicum FKMH, et altitudo FE.

SCHOLION.

310. Neque opponere iuvat, quod ſi particulae omnes aquae in plano foraminis conſtitutae, ex eo libere emanarent, tunc quidem omnia filamenta aquae minuti ſecundi tempore effluentia, totum implerent ſolidum EFKILMHG, ac proinde ipſorum ſumma, hoc eſt quantitas fluentis aquae eidem ſolido aequaretur. At quia nonnullae ex ipſis impediunt aliquas vicinarum, ne iſtae quoque tranſeant per foramen; conſequens eſt, ut actualis quantitas aquae debeat eſſe minor quam theoretica, ſive ſolidum EFKILMHG. Verum enim vero cum foramen EFHG, per quod aqua fluit, non ſit (ex hyp.) valde parvum relate ad amplitudinem vaſis, viciſſim contractio venae, quae per ipſum effluit, valde exigua (247) eſſe debet; ideoque filamenta aquae ex eodem foramine erumpentia, erunt ferme conferta eodem modo, quo forent, ſi nullae aquae particulae impedirent exitum vicinarum. Uno verbo, actualis quantitas aquae eſt reipſa minor quam theoretica, ſive ſolidum EFKILMHG; ſed haec differentia adeo eſt exigua, ut in praxi ſit merito contemnenda.

COROLLARIUM.

311. Quia ſolidum parabolicum EFKILMHG aequatur facto ex area ſegmenti parabolici FKMH in altitudinem FE ducta; etiam quantitas aquae intra minutum ſecundum temporis effluens per foramen, erit aequalis facto ex area ſegmenti parabolici FKMH in altitudinem FE ducta.

LEMMA.

312. *Datis abſciſſis* NF, NH (*Fig.* 86), *et reſpondentibus ordinatis* FK, HM *parabolae* NKM *relatae ad axem* NH, *conſtruere*

Digitized by Google

re ſupra FH *rectangulum* FCSH, *quod aequale ſit ſpatio parabolico* FKMH.

Sumantur FP, HR reſpective aequales duabus tertiis partibus ordinatarum FK, HM, et compleantur rectangula NLPF, NORH, quorum primum aequale erit ſegmento parabolico NKF, et alterum ſegmento alteri NMH. Deinde fiat, ut RD ad DO, ita PD ad quartam proportionalem DC, compleaturque rectangulum FCSH. Dico, rectangulum hoc aequari ſegmento parabolico FKMH. Nam rectangulum NORH aequatur ſegmento parabolico NMH, et rectangulum NLPF ſegmento alteri NKF; ergo differentia rectangulorum NORH, NLPF aequabitur differentiae ſegmentorum NMH, NKF. Sed differentia rectangulorum NORH, NLPF eſt ſpatium FPLORH, aut ſumma rectangulorum FDRH, LODP, et differentia ſegmentorum NMH, NKF eſt ſpatium parabolicum FKMH; ergo et ſumma rectangulorum FDRH, LODP aequabitur ſpatio parabolico FKMH. Sed quia (ex conſt.) eſt RD ad DO, ut PD ad DC, rectangulum LODP factum ſub mediis DO, et PD, aequatur rectangulo DCSR facto ſub extremis RD, et DC; ergo etiam ſumma rectangulorum FDRH, DCSR, hoc eſt rectangulum FCSH aequabitur parabolico ſpatio FKMH.

DEFINITIO III.

313. Velocitas media abſoluta aquae fluentis per foramen EFHG (Fig. 87.), eſt illa, quam ſi haberent ſingulae aquae particulae in eodem plano foraminis conſtitutae, tanta quantitas aquae intra minutum ſecundum temporis per illud flueret, quanta praeciſe fluit, dum ſingulae eius particulae velocitates diverſas habent.

PROPOSITIO XXXVII.

314. *Invenire celeritatem mediam abſolutam aquae fluentis ex dato rectangulari foramine* EFHG (*Fig.* 87.), *non valde parvo relate ad amplitudinem vaſis, in quo manet aqua ſub altitudine conſtanti* HN *pedum* 15.

Vertice N, et parametro NA pedum 60 fiat circa axem NH parabola NKM. Deinde ex punctis F et H ad libitum ſumptis in plano foraminis EFHG agantur ordinatae reſpondentes FK, HM. Quoniam particulae effluentes ex F et H, diſtant a ſuperficie ſuprema aquae per altitudines datas FN, HN, quae ſunt abſciſſae parabolae NKM, cognitae etiam erunt (307) abſolutae earum velocitates, vel ſpatia ab illis unius minuti ſecundi tempore ab-

Digitized by Google

abſoluta, quae ſunt (304) reſpondentes ordinatae FK, HM. Datis ergo abſciſſis FN, HN, et reſpondentibus ordinatis FK, HM parabolae NKM, fiat ſupra FH (312) rectangulum FCSH, quod ſit aequale parabolico dato ſpatio FKMH, atque ex puncto T, ubi recta CS convenit cum parabola, agatur ordinata TO, quae erit quaeſita velocitas media abſoluta aquae fluentis per foramen EFHG. Si enim particulae omnes aquae erumperent per foramen velocitate communi OT, quantitas aquae intra minutum ſecundum ex illo fluens, priſmati aequaretur, cuius baſis EFHG, et altitudo OT. Eſt autem hoc priſma idem cum illo, cuius baſis FCSH, et altitudo FE; ergo quantitas aquae intra minutum ſecundum effluens per foramen, priſmati aequaretur, cuius baſis eſt FCSH, et altitudo FE, ſive eſſet aequalis facto ex area rectanguli FCSH ducta in rectam FE. Atqui rectangulum FCSH aequatur (ex conſtr.) ſpatio parabolico FKMH; ergo etiam quantitas aquae intra minutum ſecundum effluens per foramen, eſſet aequalis facto ex area ſpatii parabolici FKMH ducta in rectam FE. Sed huic facto etiam eſt aequalis (311) quantitas aquae, quae intra minutum ſecundum cum diverſis celeritatibus effluit per foramen; igitur ſi particulae omnes aquae effluerent per foramen velocitate communi OT, tanta aquae copia intra minutum ſecundum efflueret per foramen, quanta actu fluit, dum ſingulae eius particulae velocitates diverſas habent, et ideo erit OT (313) velocitas media abſoluta aquae, quae quaerebatur.

Corollarium I.

315. Ut igitur inveſtiges velocitatem mediam abſolutam aquae effluentis ex rectangulari foramine EFHG, operaberis tali modo. 1.° Quaere (305) abſolutas velocitates FK, HM altitudini minimae NF, et maximae NH convenientes. 2.° Altitudinem NF duc in duas tertias partes velocitatis inventae FK, altitudinem vero NH in duas tertias partes velocitatis HM. 3.° Factum primum ſubtrahe ex ſecundo, et reſiduum erit (312) aequale rectangulo FCSH. 4.° Hoc rectangulum divide per FH, et in quoto habebis rectam HS, vel OT, quaeſitam nempe (314) velocitatem mediam abſolutam.

PROPOSITIO XXXVIII.

316. *Quantitas aquae, quae tempore unius minuti ſecundi velocitatibus variis effluit per foramen* EFHG, *aequalis eſt facto ex area eiuſdem foraminis ducta in mediam abſolutam eius velocitatem.*

Finge particulas omnes aquae effluere per foramen cum eadem

dem abſoluta velocitate media OT; utique hoc in caſu quantitas aquae tempore unius minuti ſecundi ex illo fluens, aequabitur priſmati, cuius baſis eſt foramen EFHG, et altitudo OT. Atqui haec quantitas aquae tanta eſt (314), quanta praeciſe eodem tempore velocitatibus variis effluit per foramen; ergo et quantitas aquae, quae intra minutum ſecundum velocitatibus variis effluit per foramen EFHG, aequabitur priſmati, cuius baſis eſt foramen EFHG, et altitudo velocitas media OT.

SCHOLION.

317. Expendimus uſque adhuc fluidorum corporum motus, qui a gravitatis actione oriri ſolent. Modo ſunt excutiendi illorum effectus orti ex percuſſione, quae fit quotieſcunque corpora fluida ad ſolida alliduntur, et viceverſa.

CAPUT VI.

De generalibus affectionibus percuſſionis corporum fluidorum.

DEFINITIO IV.

318. Dum vena fluidi e vaſis foramine erumpentis, incidit in obſtaculum, eius actio momentanea exercita contra ipſum, *percuſſio fluidi* dici ſolet, et quantitas motus, quae inde acquiritur ab obſtaculo excipiente percuſſionem, *impreſſio facta in obſtaculo* appellatur.

SCHOLION.

319. Difficillimum eſt tradere exactas leges percuſſionis corporum fluidorum; unde fit, ut theoria hucuſque excogitata ad menſurandam huiuſmodi percuſſionem, accurate praxi non ſit conformis. Et ſane, eadem ſupponit primo, venam fluidi perpendiculariter in planum aliquod impingentis, compoſitam eſſe ſtratis numero infinitis, parallelis percuſſo plano, et infinite parva craſſitie praeditis, quae ſingula ſucceſſive, et quovis momento impingant in idem planum. Supponit ſecundo, unumquodque ex hiſce ſtratis conſtare ex filamentis iuxta ſe poſitis, et inter ſe parallelis, quae eadem velocitate, et directione, qua fertur vena, promoveantur. Supponit tertio, particulas ſingulas componentes haec filamenta, ſtatim poſt ictum ad latera declinare, et ita praebere locum ſucceſſivis ictibus inſequentium. Verum utut prima, et ſecunda hypotheſis non aegre ad-

admitti poſſit; tertia tamen praxi conſentanea eſſe nequit; praecipue ſi agatur de directa fluidi percuſſione. Quamvis enim particulae in plani marginem incidentes, poſt ictum ab inſequentibus cogantur ad latera declinare; plures tamen illarum, quae accedunt ad centrum plani, poſt percuſſionem eadem via, qua iverant, revertentur, et ſic motum, et ictum inſequentium minuant oportebit. Hinc directa percuſſio, quae infertur ex theoria, erit perpetuo maior vera, aut actuali. Cum autem in impulſu obliquo plures particulae poſt ictum recedant ad latera, quam in directo; percuſſio obliqua, quae deducitur ex theoria, erit verae, aut actuali propinquior, quam directa.

Corollarium.

320. Hinc fluidum, et ſolidum diverſo modo agunt in obſtaculum, quod percutiunt. Nam cum ſingulae partes ſolidi ita invicem ſint connexae, ut una abſque aliis nequeat promoveri; utique ſi ſolidum, quod movetur, incidat in obſtaculum, tota ſimul eius maſſa neceſſario in illud aget. Id autem nequit fluido convenire, cuius particulae mutuo ſunt divulſae, ac ſeparatae. Quare dum vena fluidi incidit in obſtaculum, illae ſolum eius particulae ſimul in illud agere ſunt cenſendae, quae infinite proximae ipſi ſunt, et ideo percuſſio fluidi momentis ſingulis renovatur perinde ac preſſio gravis alicui horizontali tabulae incumbentis.

Scholion.

321. Fluidum percutiens diverſo modo agit, ac premens. Dum enim fluidum premit planum, quieſcit, et tota eius maſſa ſimul in illud agit; dum autem illud percutit, eſt in motu, et aliquae ſolum eius particulae ſimul in illud agunt. Rurſus dum fluidum premit planum, agit in omnia, et ſingula eius puncta; quando autem percutit idem planum, agit ſolum in ea puncta plani, in quae impingunt ſingula filamenta, ex quibus fluidum idem conſtat.

PROPOSITIO XXXIX.

322. *Si venae fluidae* IBCK, LFHM *(Fig. 88.) in ſpecie aeque graves, et aequabili motu latae, velocitatibus* V *et* u *impingant in plana* BC, FH; *earum maſſae, quae eodem momento appulſae ad eadem plana, unam efficiunt percuſſionem, erunt in compoſita ratione planorum* BC, FH, *in quae impingunt, et velocitatum, quibus impingunt.*

Sint ABCD, EFHG maſſae fluidae eodem momento appulſae

ſae ad plana BC, FH; eruntque rectae AB, EF ſpatia a venis pari tempore abſoluta, quae propterea erunt etiam proportionales velocitatibus V et *u*. Iam cum maſſae fluidae ABCD, EFHG ſint (ex hyp.) in ſpecie aeque graves, utique erunt etiam (20) ut volumina earundem, aut priſmata, quorum baſes ſunt plana BC, FH, et altitudines rectae AB, EF. Sunt autem haec priſmata in ratione compoſita baſium, ſive planorum BC, FH, et altitudinum AB, EF; igitur etiam maſſae fluidae ABCD, EFHG erunt in compoſita ratione planorum BC, FH, et altitudinum AB, EF. Vidimus autem eſſe AB ad EF, ut celeritas V ad celeritatem *u*; igitur maſſae fluidae etiam erunt in ratione compoſita planorum BC, FH, et velocitatum V et *u*.

SCHOLION.

323. Supponit hoc theorema omnes particulas venae fluidae cum eadem prorſus velocitate moveri. Verum ſi diverſis celeritatibus progrediantur, tunc eſt (314) velocitas media invenienda, eademque ſubinde velut totius venae celeritas accipienda.

PROPOSITIO XL.

324. *Iiſdem poſitis, percuſſiones a maſſis fluidis* ABCD, EFHG *exercitae in plana* BC, FH, *erunt in ratione compoſita ex rationibus plani* BC *ad planum* FH, *et quadrati celeritatis* V *ad quadratum celeritatis u*.

Percuſſiones, quas maſſae fluidae ABCD, EFHG exerunt in plana BC, FH, ſunt ut impetus earundem, ſive ut quantitates motus, quibus ad eadem plana accedunt. Sunt autem hae quantitates motus in ratione compoſita maſſae ABCD ad maſſam EFHG, et celeritatis V ad celeritatem *u*; igitur etiam percuſſiones a maſſis fluidis ABCD, EFHG exercitae in plana BC, FH, erunt in ratione compoſita maſſae ABCD ad maſſam EFHG, et celeritatis V ad celeritatem *u*. Sed maſſa ABCD eſt (322) ad maſſam EFHG in ratione compoſita plani BC ad planum FH, et celeritatis V ad celeritatem *u*; ergo etiam percuſſiones a maſſis fluidis ABCD, EFHG exercitae in plana BC, FH, erunt in ratione compoſita plani BC ad planum BH, celeritatis V ad celeritatem *u*, et iterum celeritatis V ad celeritatem *u*, hoc eſt in ratione compoſita ex rationibus plani BC ad planum FH, et quadrati celeritatis V ad quadratum celeritatis *u*.

Corollarium I.

325. Hinc ſi celeritates V et *u* fuerint inaequales, et e contrario plana BC, FH aequalia inter ſe; percuſſio a fluido in planum BC exercita, erit ad illam, quae exercetur in planum FH, ut quadratum celeritatis V ad quadratum celeritatis *u*.

Corollarium II.

326. Et contra, ſi plana BC, FH fuerint inaequalia, et ex adverſo celeritates V et *u* aequales; percuſſio a fluido exercita in planum BC, erit ad exercitam in planum aliud FH, ut planum BC ad planum FH.

PROPOSITIO XLI.

327. *Si aqua contenta in vaſe* ABCE (*Fig.* 91.), *per foramen* DC *infinite parvum ſic proſiliret, ut nullae eius particulae impedirent exitum vicinarum; vena* DFKC, *quae tota directe impingeret in planum* FK, *hoc percuteret vi aequali ponderi columnae aqueae, cuius baſis eſt foramen* DC, *et altitudo eſt dupla altitudinis* OP *aquae ſupra foramen.*

Si nullae aquae particulae e foramine effluentes (ex hyp.) impedirent exitum vicinarum; vena DFKC eſſet conſiſtentiae naturalis, et in cylindrum pariter conformata, ideoque planum FK, in quod tota directe impingit, eſſet foramini DC aequale. Porro haec vena DFKC tanta vi percuteret planum FK, quanta vi efflueret per foramen. Sed per foramen exiret (235) vi aequali ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt foramen DC, et cuius altitudo eſt dupla altitudinis OP aquae ſupra foramen; igitur vena eadem DFKC percuteret etiam planum FK vi aequali ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt foramen DC, et cuius altitudo eſt dupla altitudinis OP aquae ſupra foramen

PROPOSITIO XLII.

328. *Si aqua contenta in vaſe* ABCE (*Fig.* 91.), *effluat per foramen* DC *infinite parvum relate ad amplitudinem eiuſdem vaſis; vena* DMHINC, *quae poſt contractionem tota directe in planum* HI *impingit, hoc percutiet vi aequali ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſt minima venae ſectio* MN, *et cuius altitudo eſt dupla altitudinis* OP *aquae ſupra foramen.*

Si nullae aquae particulae impedirent exitum vicinarum, vena (327) haberet formam cylindricam DFKC, quae cum velocitate alti-

altitudini OP debita, directe impingeret in planum FK, foramini DC aequale. Verum quia vena effluit per foramen infinite parvum relate ad amplitudinem vaſis, plures particulae impediunt (254) exitum vicinarum; conſequenter vena aquae acquiret formam DMHINC, ita ut ſola eius pars MHIN ſit cylindrica, et conſiſtentiae naturalis, aut aeque denſa, et aeque velox ac vena altera DFKC, quae fluebat in hypotheſi theorematis praecedentis. Duae ergo venae DFKC, MHIN aeque denſae, et aeque veloces directe impingunt in duo inaequalia plana FK, HI; ideoque percuſſio primae in planum FK, erit (326) ad alterius percuſſionem in planum HI, ut planum FK ad planum HI. Sed planum FK eſt ad planum HI, ut foramen DC ad minimam venae ſectionem MN, ſive ut cylindrus aqueus, cuius baſis eſt foramen DC, et altitudo 2OP, ad aqueum cylindrum, cuius baſis eſt minima venae ſectio MN, et altitudo 2OP, ſive (20) ut pondus primi cylindri ad pondus ſecundi; ergo etiam percuſſio venae DFKC in planum FK erit ad percuſſionem venae MHIN in planum HI, ut pondus cylindri aquei, cuius baſis eſt foramen DC, et altitudo 2OP, ad pondus cylindri aquei, cuius baſis eſt minima venae ſectio MN, et altitudo 2OP. Sed percuſſio venae DFKC in planum FK, aequalis eſt (327) ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt foramen DC, et altitudo 2OP; ergo etiam percuſſio alterius venae MHIN in planum HI, aequabitur ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt minima venae ſectio MN, et altitudo 2OP, ſeu dupla ipſius OP.

Scholion.

329. De percuſſione venae aqueae impingentis directe in planum, hactenus multi ſunt commentati, plurimaque ſumpſere experimenta. Equidem haec non multum conveniunt inter ſe; plurima tamen, praeſertim quae de globis in medio reſiſtente motis ſumi ſolent, indicare videntur, venae aqueae percuſſionem aequari ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt foramen, et cuius altitudo eſt eadem prorſus cum altitudine aquae ſupra foramen. Daniel Bernoullius (a) primo conatus eſt hanc opinionem experimentis pluribus confirmare; verum deinde re melius conſiderata, noviſque adhibitis principiis, ſimulque aliis novi generis experimentis inſtitutis, exiſtimavit (b) communem opinionem de venae aqueae percuſſione ita mutandam eſſe, ut nempe loco foraminis DC (Fig 91.), per quod effluunt aquae, ſubſtituatur minima venae ſectio MN, et loco altitudinis aquae OP ſupra foramen, eius dupla, ſeu 2OP adhibeatur. Cum autem minima venae ſectio MN non raro (243)

 aſſur-

(a) In Commentariis Academiae Petropolitanae Tom. 2.
(b) In Hydrodynamica Sectione decimatertia, artic. 15. pag. 289.

Digitized by Google

aſſurgat ad medietatem foraminis DC, ac proinde cylindrus aqueus, cuius baſis eſt ſectio MN, et altitudo 2OP, aequetur cylindro aqueae, cuius baſis eſt foramen DC, et altitudo OP; propterea factum eſt, ut pleraque experimenta oſtendere videantur, venae aquae percuſſionem aequari ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt foramen, per quod vena erumpit, et altitudo eſt eadem cum altitudine aquae ſupra foramen.

COROLLARIUM.

330. Cum ergo vis percuſſionis fluidi (329) certo cuidam ponderi cylindri ex eodem fluido ſit aequalis; conſequens eſt etiam, ut ſit finita.

SCHOLION.

331. Hoc iam expertus fuerat Galilaeus. Hic enim (a) haſtam ſatis firmam tres circiter cubitos longam ſupra fulcimentum ſuſpendit, quae altero eius extremo duo vaſa aenea, altero aequipondium deferebat. Duo vaſa ſic funibus ſuſpenſa erant, ut alterum alteri immineret in eadem linea verticali. Vas ſuperius aquam continebat, et in eius fundo foramen inſculptum erat, cuius amplitudo ovum fere aequabat. Vas inferius a ſuperiore diſtabat duos circiter cubitos. Haec ſic diſpoſita aequilibrium conſervabant. Aperto foramine, ſimul ac aqua effluere coepit, haſta inclinari, aequipondium deorſum, et vaſa ſurſum excurrere viſa ſunt. At vix aqua in fundum vaſis inferioris irruit, ex improviſo haſta inclinari deſiit, et in contrariam partem moveri coepit, quouſque ad aequilibrium iterum ſe accomodaverit, in quo ſtatu iugiter manſit. Defluente aqua ex vaſe ſuperiori, ideo aequilibrium ſublatum eſt, quod aqua iam egreſſa, et nullam amplius preſſionem contra vaſa exercens, pondus ex ea parte minuit. Quod autem aequilibrium reſtitutum ſit ex impetu aquae in vas inferius, indicio eſt vim percuſſionis aequipollere ponderi aquae fluentis inter duo vaſa. Ab hoc experimento concludendum videtur, vim percuſſionis fluidi finitam eſſe, utpote quae certae cuiuſdam aquae pondus aequet. Dechales hoc ductus experimento, hanc ſententiam ſequutus eſt. Galilaeus ad contrariam propenſus erat, et ideo experimentum apud eum nullam obtinuit fidem, ſed tantum admirationem movit.

PROPOSITIO XLIII.

332. *Si vena aquae* HLFI (*Fig.* 89.) *data cum velocitate directe impingat in planum* FL, *deinde etiam cum eadem velocitate, ſed*

(a) Opere del Galileo Tom. 3. pag. 189.

ſed ſub obliquis angulis KOE, KOF *incidat in alterum planum* FE; *percuſſio a vena exercita in planum* FL, *erit ad illam, quam exerit in planum* FE, *ut ſinus totus ad ſinum incidentiae anguli* KOE.

Vis qua venae ſingula filamenta, veluti eſt KM, percutiunt planum FL, in quod directe impingunt, ſit expoſita per RO. Tum demiſſa ex R in planum FE perpendiculari RS, compleatur rectangulum RSOT. Vis RO, qua filamentum KM directe percutit planum FL, oblique ferit aliud planum FE. Sed vis RO aequipollet ſimul ſumptis duabus viribus RT, RS; ergo filamentum KM percutit planum FE viribus duabus ſimul RT, RS. Sed vis RT utpote agens juxta directionem plani FE, efficaciam nullam habet ad percutiendum idem planum FE; igitur hoc percutiet ſolum altera vis RS perpendicularis eidem plano, unde vis qua filamentum KM percutit planum FL, erit ad vim qua percutit planum FE, ut RO ad RS. Sed idem eſt numerus filamentorum impingentium in plana FL, FE; ergo et vis qua vena aquae HLFI percutit planum FL, erit ad vim qua eadem percutit planum FE, ut RO ad RS. Eſt autem RO ad RS, ut ſinus totus ad ſinum incidentiae anguli KOE; ergo etiam percuſſio a vena exercita in planum FL, erit ad exercitam in planum FE, ut ſinus totus ad ſinum incidentiae anguli KOE.

Corollarium I.

333. Quia demiſſa ex S ad RO perpendiculari SN, eſt RO ad RS, ut eadem RS ad RN; etiam percuſſio venae contra planum FL erit ad percuſſionem contra planum FE, ut RS ad RN.

Corollarium II.

334. Quare ſi angulus KOE eſſet graduum 30, percuſſio venae in planum FL eſſet (332) ad percuſſionem eiuſdem in planum FE, ut 2 ad 1; quippe in hac quoque ratione foret RO ad RS.

Scholion.

335. Ratio percuſſionis directae ad obliquam hic determinata, eſt paullo maior vera, ſeu actuali. Cum enim in ictu obliquo plures particulae (319) recedant ad latera, quam in directo, percuſſio directa actualis erit ad obliquam in ratione paullo minori, quam ratio RO ad RS.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XLIV.

336. *Si vena* CFAI (*Fig.* 90.) *data cum velocitate directe impingat in planum* AF, *et deinde etiam cum eadem velocitate, ſed ſub angulis obliquis* KOE, KOA *incidat in aliud planum* AE, *priori* AF *aequale; percuſſio venae contra planum* AF *erit ad percuſſionem eiuſdem in planum* AE, *ut quadratum ſinus totius ad quadratum ſinus anguli incidentiae* KOE.

Recta RO exponat vim, qua filamentum KM directe percuteret planum AF in M. Tum ex R demiſſa ad planum AE perpendiculari RS, compleatur rectangulum RSOT, atque ex S ad RO demittatur perpendicularis SN. Demum intelligatur filamentum PE occurrere plano AF in L. Percuſſio venae in planum AF eſt (326) ad percuſſionem eiuſdem in planum AL, ut AF ad AL, vel (ex hyp.) ut AE ad AL. Sed ob triangulum ELA ſimile alteri RSO, eſt AE ad AL, ut RO ad RS; ergo etiam percuſſio venae in planum AF erit ad percuſſionem eiuſdem in planum AL, ut RO ad RS. Atqui etiam percuſſio in planum AL eſt (333) ad percuſſionem in planum AE, ut RS ad RN; ergo ex aequo, percuſſio venae in planum AF erit ad percuſſionem in planum AE, ut RO ad RN. Quoniam vero tres rectae RO, RS, RN ſunt in continua proportione, eſt RO ad RN, ut quadratum RO ad quadratum RS, vel ut quadratum ſinus totius ad quadratum ſinus anguli KOE; ergo etiam percuſſio venae in planum AF erit ad percuſſionem eiuſdem in planum AE, ut quadratum ſinus totius ad quadratum ſinus anguli KOE.

PROPOSITIO XLV.

337. *Si particulae fluidi data cum velocitate impingant in globum* AKIZ (*Fig.* 92.) *ſecundum rectas parallelas ad radium eius* AC, *ſitque* FB *una ex illis rectis, quae producta ſecet perpendiculariter radium* CK *in* E; *vis qua particula fluidi ſecundum rectam* FB *oblique incidendo in globum, perpendiculariter illum ferit in* B, *erit ad vim qua particula eadem directe incidens in cylindrum* ONGQ *circumſcriptum eidem globo, perpendiculariter ferit illum in* P, *ut* BE *ad* AC.

Recta LB exponat vim qua particula fluidi directe incidens in cylindrum, perpendiculariter ipſum in P feriret. Tum ductis radio CB, et tangente BV, in illum, et hanc cadant ex puncto L perpendiculares LS, LD, ut inde emergat rectangulum BSLD.

Vis

Vis LB aequivalet duabus viribus ſimul LS, LD, ſive DB, SB. Sed vis DB utpote agens iuxta directionem tangentis VB, efficaciam nullam habet ad feriendum globum AKIZ; igitur ipſum feriet ſolum altera vis SB perpendicularis eidem globo, unde vis qua particula fluidi perpendiculariter ferit globum in B, erit ad vim qua particula eadem perpendiculariter in P feriret cylindrum ONGQ, ut SB ad LB. Sed ob triangulum rectangulum CEB ſimile alteri item rectangulo BSL, eſt BE ad BC, ut SB ad LB; ergo etiam vis qua particula fluidi perpendiculariter ferit globum in B, erit ad vim qua particula eadem perpendiculariter in P feriret cylindrum ONGQ, ut BE ad BC, vel ut BE ad AC.

COROLLARIUM.

338. Quia directio vis SB tendit ad centrum C; patet vim qua particula fluidi perpendiculariter ferit globum in B, eundem pariter promovere ſecundum plagam rectae BC.

PROPOSITIO XLVI.

339. *Iiſdem poſitis, vis qua particula fluidi ſecundum rectam* FB *oblique incidendo in globum* AKIZ, *ipſum promovet ſecundum plagam rectae* FB, *eſt ad vim qua particula eadem directe incidens in cylindrum* NOGQ, *ipſum movet in eandem plagam, ut quadratum* BE *ad quadratum* PE.

Demiſſa ex S ad LB perpendiculari SR, compleatur rectangulum BTSR. Particula fluidi oblique incidendo in globum ſecundum plagam rectae FB, eundem promovet iuxta plagam rectae BC (338) vi SB. Sed vis SB aequipollet duabus ſimul viribus SR, ST, ſive TB, RB; ergo particula eadem fluidi movebit globum iuxta plagam rectae BC viribus duabus ſimul TB, RB. Sed globum non promovet vi TB perpendiculari ad radium AC, quia facta ſimili conſtructione ad oppoſitam aliam radii huius partem in puncto B', eadem vis TB eliditur ab altera vi directe oppoſita, et aequali; ergo particula fluidi promovebit globum ſolummodo vi RB, agente ſecundum rectam incidentiae ſuae FB, ideoque vis qua particula fluidi globum movet iuxta plagam rectae FB, erit ad vim qua particula eadem directe incidens in cylindrum, ipſum promovet in eandem plagam, ut RB ad LB. Verum ob continue proportionales RB, SB, LB, eſt RB ad LB, ut quadratum SB ad quadratum LB, vel (337) ut quadratum BE ad quadratum BC, vel AC, aut PE; ergo et vis qua particula fluidi movet globum ſecundum plagam rectae FB, erit ad vim qua eadem particula movet cylindrum in eandem plagam, ut quadratum BE ad quadratum PE.

LEM-

Digitized by Google

LEMMA I.

340. *Si circa latus* CA (*Fig.* 92.) *quadrati* KCAN *veluti circa axem, vertice* C, *et parametro* CA *deſcribatur parabola* CH; *haec neceſſario tranſibit per punctum* N.

Quia parabolae CH parameter (ex hyp.) eſt aequalis abſciſſae CA; quadratum CA aequabitur rectangulo ex abſciſſa CA in parametrum. Sed cum aequales ſint rectae CA, AN, etiam aequabuntur quadrata CA, AN; ergo et quadratum AN aequabitur rectangulo ex abſciſſa CA in parametrum. Eſt autem AN perpendicularis ad axem CA parabolae CH; igitur erit quoque ordinata huius parabolae, quae proinde tranſibit per punctum N.

LEMMA II.

341. *Si parabola* CHN *mox deſcripta, conveniat cum recta* FE *in* H; *tres rectae* PE, BE, PH *erunt continue proportionales.*

Ex puncto H agatur ordinata HM ad axem CA. Quia parameter parabolae eſt CA, quadratum ordinatae HM aequale erit rectangulo ACM. Rectae autem HM, AC, CM ſunt reſpective aequales ipſis EC, EP, EH; igitur etiam EC quadratum aequabitur rectangulo PEH. Porro CB quadratum aequatur quadratis ſimul BE, EC; ergo et CB quadratum aequabitur quadrato BE, una cum rectangulo PEH. Eſt vero quadratum CB aequale quadrato CA, vel PE; ergo etiam PE quadratum aequabitur quadrato BE, una cum rectangulo PEH. Atqui PE quadratum aequatur duobus ſimul rectangulis EPH, PEH; ergo etiam duo ſimul rectangula EPH, PEH aequabuntur quadrato BE, una cum rectangulo PEH, et ideo utrinque dempto rectangulo PEH, reliquum rectangulum EPH aequabitur reliquo quadrato BE, conſequenter tres rectae PE, BE, PH erunt continue proportionales.

COROLLARIUM I.

342. Unde prima PE erit ad tertiam PH, ut quadratum primae PE ad quadratum ſecundae BE.

COROLLARIUM II.

343. Hinc vis particulae fluidi ad movendum cylindrum ON GQ ſecundum plagam rectae FB, vel A C, erit ad vim eiuſdem ad movendum globum AKIZ in eandem plagam, ut PE ad PH.

Vis

Vis enim prima eſt ad ſecundam (339), ut quadratum PE ad quadratum BE. Sed quadratum PE eſt (342) ad quadratum BE, ut PE ad PH; ergo et prima vis ad ſecundam erit, ut PE ad PH.

L E M M A III.

344. *Si* A *ſit ad* B (*Fig.* 93.), *ut* C *ad* D, *et* E *ſit ad* F, *ut* H *ad* G, *ac praeterea tam ſingula prima antecedentia* A *et* E, *quam ſecunda* C *et* H *ſint aequalia inter ſe; ſumma primorum antecedentium* A *et* E *erit ad ſummam ſuorum conſequentium* B *et* F, *ut ſumma antecedentium ſecundorum* C *et* H *ad ſummam ſuorum conſequentium* D *et* G.

Quoniam A eſt ad B, ut C ad D; etiam permutando, A erit ad C, ut B ad D. Eandem ob cauſam E quoque erit ad H, ut F ad G. Sed quia (ex hyp.) aequantur tam A et E, quam C et H, eſt A ad C, ut E ad H; ergo etiam B erit ad D, ut F ad G, et ſumma B et F erit ad ſummam D et G, ut B ad D, ſive (ex demonſtr.) ut A ad C. Rurſus cum (ex demonſtr.) A ſit ad C, ut E ad H, etiam ſumma A et E erit ad ſummam C et H, ut A ad C; ergo etiam ſumma A et E erit ad ſummam C et H, ut ſumma B et F ad ſummam D et G, et permutando, ſumma A et E erit ad ſummam B et F, ut ſumma C et H ad ſummam D et G.

Corollarium.

345. Quod hic oſtenſum fuit in duabus ſolum analogiis, demonſtrabitur pari modo in quotcunque analogiis etiam numero infinitis.

L E M M A IV.

346. *Si circa latus* CA (*Fig.* 94.) *quadrati* CKNA *veluti circa axem, vertice* C, *et parametro* CA *deſcribatur parabola* CH, *quae producta* (340) *tranſibit per punctum* N; *cylindrus genitus ex rotatione quadrati* CKNA *circa eius latus* CA, *erit duplus paraboloidis ortae ex revolutione parabolae* CNA *circa eiuſdem axem* CA.

Per quodlibet punctum P ducatur ad axem CA perpendicularis PM, parabolae occurrens in punto H, et rectae KN in M. Iungatur etiam CN, conveniens cum recta PM in I. Iam in rotatione totius figurae circa axem CA, recta PM circulum deſcribet, qui erit ad circulum ab alia recta PH deſcriptum, ut quadratum PM ad quadratum PH. Eſt autem PM ipſi AN aequalis;

ergo

ergo et circulus radio PM deſcriptus, erit ad circulum radio PH factum, ut quadratum AN ad quadratum PH. Sed in parabola CHN eſt quadratum AN ad quadratum PH, ut CA ad CP, vel (ob triangulum CAN ſimile alteri CPI) ut AN ad PI, aut ut PM ad PI; ergo etiam circulus radio PM deſcriptus, erit ad circulum radio PH factum, ut PM ad PI. Eandem ob cauſam, ſi quoque ex puncto *p* excitetur ad axem AC perpendicularis *pm*; circulus radio *pm* deſcriptus, erit ad circulum radio *ph* factum, ut *pm* ad *pi*; et ſic in infinitum, ſi ex punctis omnibus axis CA ad hunc excitentur perpendicula, ut PM, *pm*. Atqui in omnibus hiſce analogiis tam prima antecedentia, quam ſecunda ſunt ſemper aequalia inter ſe, ut patet; igitur ſumma omnium primorum antecedentium, ſeu circulorum, quos rectae PM, *pm* rotando deſcribunt, erit (344) ad ſummam omnium ſuorum conſequentium, ſeu circulorum, quos deſcribunt rectae PH, *ph*, ut ſumma omnium ſecundorum antecedentium, ſive omnium PM, *pm* ad ſummam omnium ſuorum conſequentium, ſive omnium PI, *pi*. Sed prima ſumma occupat cylindrum ortum ex rotatione quadrati CKNA circa eius latus CA, et ſecunda occupat paraboloidem, ſive ſolidum genitum ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA; ergo etiam cylindrus ortus ex ratione quadrati GKNA circa eius latus CA, erit ad paraboloidem genitam ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA, ut ſumma omnium PM, *pm* ad ſummam omnium PI, *pi*. Sed ſumma omnium PM, *pm* occupat quadratum CKNA, et ſumma omnium PI, *pi* occupat triangulum iſoſcele CAN; ergo cylindrus ortus ex rotatione quadrati CKNA circa eius latus CA, erit ad paraboloidem genitam ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA, ut quadratum GKNA ad triangulum CAN. Sed quadratum CKNA eſt duplum trianguli CAN; ergo et cylindrus ortus ex rotatione quadrati CKNA circa eius latus CA, erit duplus paraboloidis genitae ex rotatione parabolae CNA circa eius axem CA.

PROPOSITIO XLVII.

347. *Iiſdem poſitis, quae in praecedenti propoſitione, vis tota fluidi ad movendum cylindrum* ONGQ *(Fig. 92.) ſecundum plagam axis* ACI, *eſt duplo maior, quam vis tota eiuſdem ad movendum globum* AKIZ *in eandem plagam.*

Si ex omnibus punctis circularis baſis NO cylindri ONGQ erigantur perpendicula, ut PE, PH; vis particulae ad movendum cylindrum ſecundum plagam axis ACI, erit (343) ubique ad vim eiuſdem ad promovendum globum AKIZ in eandem plagam

gam, ut perpendiculum PE ad perpendiculum PH. Unde vis omnium particularum ad movendum cylindrum, erit ad vim omnium particularum ad movendum globum, ut ſolidum, quod occupatur a perpendiculis omnibus PE per totam baſim cylindri ductis, ad ſolidum occupatum ab omnibus perpendiculis PH per totam baſim eandem ductis. Sed prius ſolidum eſt cylindrus ortus ex rotatione quadrati ANKC circa latus eius CA, poſterius eſt parabolois genita ex rotatione ſegmenti parabolici CNA circa axem eius CA; ergo et vis tota fluidi ad movendum cylindrum ſecundum plagam ſui axeos ACI, erit ad vim totam eiuſdem ad movendum globum in eandem plagam, ut cylindrus ad paraboloidem. Atqui cylindrus eſt (346) duplo maior quam parabolois; ergo et vis tota fluidi ad movendum cylindrum ſecundum plagam ſui axeos ACI, erit duplo maior quam vis tota eiuſdem ad movendum globum in eandem plagam.

Corollarium I.

348. Quoniam vis tota fluidi ad movendum cylindrum eſt aequalis actioni eiuſdem fluidi in cylindrum, et tota vis fluidi ad movendum globum eſt aequalis actioni eiuſdem fluidi in globum; etiam actio fluidi in cylindrum erit duplo maior (347) quam actio eiuſdem in globum.

Corollarium II.

349. Et quia actio fluidi in cylindrum, et globum eſt (318) percuſſio a fluido exercita in utrumque; ſequitur, etiam percuſſionem exercitam a fluido in cylindrum, eſſe duplo maiorem illa, quam idem fluidum exerit contra globum.

PROPOSITIO XLVIII.

350. *Si cylindrus* ONGQ, *et globus* AKIZ (*Fig.* 92.) *finitas habeant materiae quantitates; vis tota fluidi ad utrumque ſolidum promovendum ſecundum plagam axeos* ACI, *tempore infinite parvo non niſi velocitatem infinite parvam in illis gignet.*

Vis tota fluidi ad movendum cylindrum, et globum iuxta plagam axeos ACI, eſt aequalis actioni exercitae a fluido in utrumque iuxta eandem plagam, ſive (318) eiuſdem fluidi percuſſioni. Atqui haec percuſſio fluidi eſt (330) finita; ergo et finita erit vis tota fluidi utrumque ſolidum promoventis, ideoque tempore infinite parvo quantitatem motus infinite parvam in illis gignet. Sed materiae quantitas (ex hyp.) in illis ſolidis eſt finita; igitur e contrario velocitas genita in iiſdem, erit infinite parva.

Digitized by Google

Corollarium.

351. Tota ergo vis fluidi, quae cylindrum, et globum movet iuxta utriuſque axeos directionem, velut per gradus, hoc eſt inſtar preſſionis in utrumque ſolidum agit, neque finitam velocitatem ſolidis hiſce imprimit, niſi tempus finitum antea lapſum fuerit.

CAPUT VII.

De reſiſtentia, quam corpora patiuntur, dum per fluida promoventur.

OBSERVATIO.

352. Dum corpus in fluido promovetur, eius actio duos effectus edit; primo enim dividit partes fluidi, ſecundo illis communicat velocitatem, cum qua ipſae etiam poſt ceſſatam corporis actionem inter ſe moventur. Diviſioni partium fluidi reſiſtit earundem partium cohaerentia; communicationi autem velocitatis reſiſtit vis inertiae partium earundem.

Corollarium.

353. Unde fluidi reſiſtentia ex duplici cauſa oritur, nempe ex tenacitate, aut cohaeſione eius particularum, et ex earum vi inertiae, aut reactione, qua nempe ipſae reſiſtunt corpori conanti ſibi inducere ſtatum motus. Prima vocatur *reſiſtentia ex prima cauſa*, altera autem dicitur *reſiſtentia ex ſecunda cauſa*.

AXIOMA.

354. Quodlibet corpus ſolidum eandem a fluido excipit impreſſionem, ſive data cum velocitate, dataque in directione intra quieſcens fluidum moveatur, ſive fluidum cum eadem velocitate, et directione impingat in corpus ſolidum, ſed quieſcens.

PROPOSITIO XLIX.

355. *Si cylindrus* ONGQ (*Fig.* 95.) *velocitate* V, *et iuxta directionem eius axeos* ICA *moveatur in quieſcente fluido* LGQM, *cuius partium tenacitas nulla ſit; reactio fluidi in cylindrum, aequabitur percuſſioni, quam idem fluidum exereret in cylindrum, ſi in hunc immotum incurreret cum eadem velocitate, qua cylindrus antea ferebatur.*

In

In caſu in quo cylindrus movetur, dum fluidum quieſcit, impreſſio quam cylindrus a fluido excipit, eſt aequalis eiuſdem fluidi reactioni. Rurſus in caſu in quo fluidum movetur, dum ſolidum quieſcit, impreſſio quam cylindrus a fluido excipit, eſt aequalis eiuſdem fluidi percuſſioni. Sed prima impreſſio eſt (354) eadem cum ſecunda; igitur etiam reactio fluidi in cylindrum, quae fit in primo caſu, aequalis erit fluidi percuſſioni, quae fit in alio.

Scholion.

356. Eadem ratione, ſi globus AKIZ (Fig. 95.) velocitate V, et iuxta directionem ſui axeos ICA progrediatur intra quieſcens fluidum LGQM; huius reactio in globum aequabitur percuſſioni, quam idem fluidum exerceret in globum, ſi in eum immotum incurreret cum eadem velocitate, et directione, qua globus antea ferebatur.

Corollarium I.

357. Quia reactio fluidi in cylindrum motum ONGQ, eſt reſiſtentia (353) ex ſecunda cauſa, quam idem cylindrus ſubit; haec etiam reſiſtentia aequabitur percuſſioni, quam fluidum exerceret in cylindrum, ſi in hunc immotum irrueret cum eadem celeritate, et directione, quam cylindrus habebat.

Corollarium II.

358. Eadem quoque ratione, reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam patitur globus AKIZ, dum intra immotum fluidum promovetur, aequabitur percuſſioni, quam idem fluidum exerceret in globum, ſi in hunc immotum incurreret cum eadem velocitate, et directione, qua globus antea ferebatur.

Propositio L.

359. *Si cylindrus rectus* ONGQ, *et globus ipſi inſcriptus* AKIZ (*Fig.* 95.) *cum eadem velocitate* V *et iuxta directionem communis axeos* ICA *moveantur in eodem fluido quieſcente* LGQM, *cuius partium tenacitas nulla ſit; reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam cylindrus ſubit, duplo maior erit quam reſiſtentia, quam ſubit globus.*

Finge haec duo corpora eſſe immota, et fluidum e contrario eadem celeritate, ac directione, quas primo habebant corpora, promoveri. Hoc facto, percuſſio exercita a moto fluido in cylindrum ONGQ, dupla eius erit (349), quae exercetur in globum AKIZ. Sed reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam cylindrus ſubit, aequalis

eſt

Digitized by Google

eſt (357) percuſſioni factae a moto fluido in cylindrum, et reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit globus, aequat (358) percuſſionem factam a fluido moto in globum; ergo et reſiſtentia cylindri orta ex ſecunda cauſa, duplo maior erit quam reſiſtentia globi.

PROPOSITIO LI.

360. *Si cylindrus* ONGQ *(Fig. 95.), et globus* AKIZ *finitas habeant materiae quantitates, et ambo cum finita velocitate promoveantur in fluido quieſcente, cuius partium tenacitas nulla ſit; reſiſtentia fluidi orta ex ſecunda cauſa, tempore infinite parvo non niſi velocitatem infinite parvam ex illis detrahet.*

Solida haec quieſcere ſupponantur, et fluidum e contrario in ea immota incurrat cum illa eadem velocitate, et directione, quibus prius haec ſolida ferebantur; eritque (357. 358.) percuſſio fluidi hoc in caſu aequalis reſiſtentiae fluidi in priori. Sed percuſſio fluidi in ſecundo caſu, tempore infinite parvo (350) non niſi velocitatem infinite parvam ſolidis illis imprimit; igitur e contrario reſiſtentia fluidi in primo caſu tempore infinite parvo non niſi velocitatem infinite parvam ex illis detrahet.

PROPOSITIO LII.

361. *Si cylindrus* ONGQ *(Fig. 95.), et globus* AKIZ *finitas habeant materiae quantitates, et ambo cum finita velocitate ferantur in fluido quieſcente, cuius tenacitas partium nulla ſit; reſiſtentia fluidi orta ex ſecunda cauſa, tempore infinite parvo ſpectari poterit velut conſtans, aut uniformis.*

Tam cylindrus, quam globus ob reſiſtentiam, quam ambo ſubeunt a fluido quieſcente, tempore infinite parvo (360) amittunt ſolum velocitatem infinite parvam. Sed haec negligi tuto poteſt prae finita velocitate, quam ſolidum utrumque habet; ergo velocitas ſolidi utriuſque toto illo tempuſculo ſpectari poteſt velut invariata. Sed quamdiu velocitas ſolidi, quod in fluido promovetur, eſt invariata, reſiſtentia fluidi eadem perſeverat, ſive eſt conſtans, aut uniformis; ergo fluidi reſiſtentia orta ex ſecunda cauſa, tempore infinite parvo ſpectari poterit velut conſtans, aut uniformis.

Corollarium.

362. Cum velocitas ſolidi cuiuſcunque, quod cum finita velocitate in fluido promovetur, tempore infinite parvo, et per ſpatium

tium infinite parvum (361) ſpectari poſſit velut invariata, eius motus pro aequabili habendus erit.

SCHOLION.

363. Quamvis hic motus pro aequabili ſit habendus, reipſa tamen eſt uniformiter retardatus. Nam reſiſtentia (361) toto illo tempuſculo conſtans eſt. Sed haec per totum illud tempuſculum indeſinenter in corpus agit; ergo hoc aequalibus tempuſculi huius partibus aequales etiam amittet gradus velocitatis, atque adeo eiuſdem motus erit uniformiter retardatus.

PROPOSITIO LIII.

364. *Reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit cylindrus rectus in fluido motus iuxta ſui axeos directionem, valet pondus columnae ex eodem fluido, cuius baſis aequatur baſi eiuſdem cylindri, et cuius altitudo eſt dupla illius, ex qua grave libere deſcendendo, poteſt acquirere velocitatem, cum qua cylindrus in fluido promovetur.*

Cylindrus rectus ONGQ (Fig. 95.) iuxta directionem ſui axeos ICA moveatur in quieſcente fluido LGQM cum velocitate V, quam grave libere deſcendendo ex altitudine DP (Fig. 96.) acquirere poteſt. Sumpta deinde SP dupla ipſius DP, fiat ex eodem fluido columna SB, cuius baſis PB aequetur baſi QN cylindri ONGQ. Dico, reſiſtentiam ex ſecunda cauſa, quam idem cylindrus ſubit, valere pondus columnae SB. Pone enim cylindrum ONGQ immotum eſſe, et e contrario fluidum LGQM eadem velocitate et directione, qua cylindrus antea ferebatur, incurrere in eius baſim ON. Pone praeterea idem fluidum LGQM eſſe velut contractam venam exilientem per laterale aliquod orificium inſculptum in latere vaſis, habentis infinitam veluti amplitudinem, et in quo fluidi altitudo ſupra orificii illius centrum, ſemper eadem conſervetur, et quidem ipſi DP aequalis. His poſitis, percuſſio facta a vena fluida LGQM in cylindrum ONGQ, valebit (328) pondus columnae ex eodem fluido, cuius baſis aequatur baſi NO cylindri, et cuius altitudo eſt dupla ipſius DP. Sed haec columna eſt eadem ac SB; ergo percuſſio facta a vena fluida LGQM in cylindrum ONGQ, valebit pondus columnae SB. Sed reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit cylindrus ONGQ, dum velocitate V fertur intra quieſcens fluidum LGQM, aequalis eſt (357) percuſſioni factae a fluido LGQM in immotum cylindrum ONGQ; ergo et reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit cylindrus ONGQ, valebit pondus columnae SB.

Co-

Digitized by Google

Corollarium.

365. Quia reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit globus AKIZ, eſt (359) dimidia reſiſtentiae, quam patitur cylindrus ONGQ; patet reſiſtentiam, quam ſubit globus AKIZ, valere pondus columnae DB, cuius baſis PB aequatur circulo maximo eiuſdem globi, et cuius altitudo DP eſt eadem cum illa, ex qua grave libere deſcendendo, acquirere poteſt velocitatem, qua globus intra fluidum promovetur.

PROPOSITIO LIV.

366. *Altitudinem invenire, ex qua cylindrus rectus* ONGQ *(Fig. 95.) libere deſcendendo, eam poteſt acquirere velocitatem, cum qua ſi in dato fluido moveretur iuxta directionem ſui axeos* ICA, *reſiſtentia ex ſecunda cauſa eiuſdem ponderi aequaretur.*

Fiat, ut gravitas ſpecifica fluidi ad illam cylindri ONGQ, ita dimidia altitudo OQ cylindri ad quartam proportionalem DP (Fig. 96.). Dico, altitudinem DP quaeſitam eſſe. Sumpta enim altitudine SP, quae ſit alterius DP dupla, efformetur ex eodem fluido cylindrus rectus SPBT, baſim habens aequalem baſi NO cylindri ONGQ, altitudinem vero SP. Gravitas ſpecifica fluidi eſt (ex conſtr.) ad ſpecificam gravitatem cylindri ONGQ, ut dimidia OQ ad DP, ſive ut dimidium altitudinis OQ cylindri ONGQ ad dimidium altitudinis SP cylindri SPBT, ſive ut illius altitudo OQ ad huius altitudinem SP. Sed etiam cylindrus ONGQ eſt ad cylindrum SPBT, ut altitudo primi OQ ad altitudinem ſecundi SP; ergo et gravitas ſpecifica cylindri SPBT erit ad ſpecificam gravitatem cylindri ONGQ, ut hic cylindrus ONGQ ad cylindrum SPBT. Sed quotieſcunque ſpecificae gravitates duorum corporum ſunt reciproce ut volumina eorundem, etiam illorum pondera ſunt (27) aequalia; ergo pondus cylindri ONGQ aequabitur ponderi cylindri alterius SPBT. Sed quando cylindrus ONGQ in fluido promovetur cum ea velocitate, quam acquirit libere deſcendendo ex altitudine DP, reſiſtentia ex ſecunda cauſa valet (364) pondus cylindri SPBT; ergo etiam valebit pondus cylindri ONGQ.

Corollarium.

367. Quoties fluidum, et cylindrus in eo motus, eandem habent ſpecificam gravitatem, ratio OQ ad SP evadit ratio aequalitatis, hoc eſt aequales fiunt OQ, SP, et ideo altitudo DP, ex qua cadere cylindrus debet, ut acquirat celeritatem, cum qua ſi in flui-

fluido moveretur, reſiſtentia ex ſecunda cauſa, eiuſdem ponderi aequaretur, erit dimidia altitudinis OQ cylindri ONGQ.

PROPOSITIO LV.

368. *Altitudinem invenire, a qua globus* AKIZ *(Fig. 95.) libere deſcendendo, eam acquirit celeritatem, cum qua ſi in dato fluido moveretur iuxta directionem ſui axeos* ICA, *reſiſtentia ex ſecunda cauſa, eiuſdem ponderi aequaretur.*

Sumpta altitudine DP (Fig. 96.) aequali duabus tertiis partibus diametri IA globi AKIZ, fiat, ut gravitas ſpecifica fluidi ad illam globi, ita DP ad quartam proportionalem HP. Dico, altitudinem hanc HP quaeſitam eſſe. Nam ſuper baſim PB circulo maximo globi aequalem, fiant ex fluido duo cylindri recti HPBY, DPBR. Quia altitudo DP cylindri DPBR eſt (ex conſtr.) aequalis duabus tertiis partibus diametri IA globi; utique ipſe erit aequalis globo AKIZ, unde globus AKIZ erit ad cylindrum HPBY, ut cylindrus DPBR ad eundem cylindrum HPBY, ſive ut DP ad HP. His autem poſitis, ita oſtenditur propoſitio. Gravitas ſpecifica fluidi, aut cylindri HPBY eſt (ex conſtr.) ad ſpecificam gravitatem globi AKIZ, ut DP ad HP. Sed etiam globus AKIZ eſt (ex demonſtr.) ad cylindrum HPBY, ut DP ad HP; ergo et gravitas ſpecifica cylindri HPBY erit ad illam globi AKIZ, ut hic globus AKIZ ad cylindrum HPBY, ideoque pondus cylindri HPBY aequabitur (27) ponderi globi AKIZ. Sed quando hic globus in fluido promovetur cum ea velocitate, quam acquirit libere deſcendendo ex altitudine HP, reſiſtentia ex ſecunda cauſa valet (365) pondus cylindri HPBY; ergo etiam valebit pondus globi AKIZ.

COROLLARIUM.

369. Quando globus, et fluidum, in quo movetur, eandem habent ſpecificam gravitatem, ratio DP ad HP evadit ratio aequalitatis, hoc eſt fiunt aequales DP, HP; et ideo altitudo, ex qua cadere globus debet, ut inde acquirat velocitatem, cum qua ſi in fluido moveretur, reſiſtentia ex ſecunda cauſa, eiuſdem ponderi aequalis eſſet, aequabitur duabus tertiis partibus diametri eius IA.

PROPOSITIO LVI.

370. *Si duo cylindri recti* ONGQ, *ongq (Fig. 97.) ſimiles, et aequales cum velocitatibus* V *et* u, *ac iuxta directiones ſuorum axium* AI, *et* ai *in eodem immoto fluido moveantur; reſiſtentia ex ſecun-*

Digitized by Google

da cauſa, quam ſubit cylindrus ONGQ, *erit ad illam, quam patitur alter cylindrus ongq, ut quadratum velocitatis* V *ad quadratum velocitatis u.*

Sit DP altitudo, ex qua cylindrus ONGQ libere deſcendendo, poteſt acquirere velocitatem V, cum qua progreditur intra fluidum. Similiter ſit *dp* altera altitudo, ex qua cylindrus *ongq* libere deſcendendo, poteſt acquirere velocitatem *u*, cum qua eodem in fluido promovetur; eritque altitudo DP ad altitudinem *dp*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*. Hoc poſito, reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit cylindrus ONGQ, valebit (364) pondus columnae ex fluido, cuius baſis eſt circulo ON aequalis, et cuius altitudo eſt altitudinis DP dupla. Similiter reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam patitur cylindrus *ongq*, valebit (364) pondus columnae ex fluido, habentis baſim circulo *on* aequalem, et altitudinem duplam altitudinis *dp*; igitur reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit cylindrus ONGQ, erit ad illam, quam patitur cylindrus alter *ongq*, ut pondus primae columnae ad pondus ſecundae. Verum cum hae columnae ex eodem fluido componantur, habeantque aequales baſes, erunt earum pondera, ut altitudines earundem; ergo et reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit cylindrus ONGQ, erit ad illam, quam patitur cylindrus *ongq*, ut duplum altitudinis DP ad duplum altitudinis *dp*, ſive ut altitudo DP ad altitudinem *dp*. Vidimus autem altitudinem DP eſſe ad altitudinem *dp*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*; ergo et reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit cylindrus ONGQ, erit ad reſiſtentiam ex ſecunda cauſa, quam patitur cylindrus alter *ongq*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*.

Corollarium I.

371. Quoniam reſiſtentiae ex ſecunda cauſa, quas ſubeunt globi AKIZ, *akiz*, ſunt (359) medietates reſiſtentiarum, quas patiuntur cylindri ONGQ, *ongq*; etiam reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubit globus AKIZ, erit (370) ad illam, quam patitur globus alter *akiz*, ut quadratum velocitatis V ad quadratum velocitatis *u*.

Corollarium II.

372. Quia dum cylindrus, ipſique inſcriptus globus in eodem fluido promoventur, eorum velocitas, et quadratum eiuſdem momentis ſingulis variatur (360); utique cum mutata velocitate etiam mutabitur (370. 371.) reſiſtentia ex ſecunda cauſa, quam ſubeunt,

Co-

Digitized by Google

Corollarium III.

373. Denique cum reſiſtentiae ex ſecunda cauſa, quas ſubeunt duo cylindri, aut duo globi ſimiles, et aequales ſint (370. 371.) ut quadrata velocitatum, quibus in eodem fluido progrediuntur; ſequitur, quod ſi aequales habuerint celeritates, etiam reſiſtentias omnino aequales ſint ſubituri.

PROPOSITIO LVII.

374. *Reſiſtentia ex prima cauſa, ſive ex tenacitate partium fluidi oriunda, conferri poteſt cum vi gravitatis, quae retardat motum corporis aſcendentis.*

Corpora duo aequalia, et ſimilia cum eadem velocitate e locis C et *c* (Fig. 96.) per lineas CF, *cf* ad horizontalem rectam C*c* normales, proiiciantur, atque in locis aeque altis A et *a*, B et *b*, D et *d*, &c. aequalem ſubeant reſiſtentiam. Corpus quidem C ſubeat reſiſtentiam a conſtanti vi gravitatis (quae in locis A, B, D, E, &c. tantum agat) oriundam. Corpus vero *c* reſiſtentiam patiatur a data partium fluidi tenacitate, in locis tantum *a*, *b*, *d*, *e*, &c. reagente ortam. In ſpatiis autem intermediis AB et *ab*, BD et *bd*, &c. nullum obſtaculum ſit in motibus. Quo facto, dum perveniunt corpora ad A et *a*, aequalem habent velocitatem, et deinde victis in A et *a* obſtaculis aequalibus, pari adhuc velocitate per ſpatia minime reſiſtentia AB et *ab* feruntur. Simili modo ob aequales reſiſtentias in locis B et *b*, per ſpatia BD et *bd* ſimul moventur, et ſic deinceps eandem ſemper velocitatem in locis aeque altis habent. Minuantur nunc aequalia illa ſpatia AB et *ab*, BD et *bd*, &c., et eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gtavitatis, et actio reſiſtentiae continua efficiatur; utique etiam hoc in caſu corpora illa duo eandem reſiſtentiam patientur, et in locis aeque altis eandem velocitatem omnino habebunt. Igitur reſiſtentia ex prima cauſa conferri poteſt cum conſtanti, et uniformi vi gravitatis, licet haec reſiſtentia nullo modo agat in corpus quieſcens, in quod gravitas ſemper agit.

Corollarium I.

375. Dum ergo corpus in fluido promovetur, tenacitas partium fluidi ipſi reſiſtit eadem lege, qua vis gravitatis reſiſtit corpori aſcendenti.

Corollarium II.

376. Sicut ergo vis gravitatis reſiſtens corpori aſcendenti, eſt

 con-

conſtans, aut uniformis; ita et reſiſtentia ex prima cauſa erit conſtans, aut uniformis.

Corollarium III.

377. Et ſicuti vis gravitatis aequalibus temporibus ſubtrahit a corpore aſcendente aequales gradus celeritatis; ita etiam reſiſtentia ex prima cauſa aequalibus temporibus aequales gradus celeritatis auferre debet a corpore, quod intra fluidum promovetur.

PROPOSITIO LVIII.

378. *Si duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia diverſis celeritatibus intra idem fluidum moveantur; eadem, ſepoſita reſiſtentia ex ſecunda cauſa, aequalibus temporibus aequales gradus velocitatis amittent.*

Si corpora illa duo verticaliter ſurſum proiicerentur cum reſpectivis illis velocitatibus, quibus in eodem fluido progrediuntur; ambo, ob uniformem reſiſtentiam gravitatis, aequalibus temporibus aequales velocitatis gradus amitterent. Sed dum corpora illa duo intra idem fliuidum promoventur, tenacitas partium fluidi ipſis reſiſtit (375) eadem lege, qua vis gravitatis eiſdem reſiſtit verticaliter aſcendentibus; igitur etiam quando illa duo corpora in eodem fluido promoventur, aequalibus temporibus aequales gradus velocitatis amittent.

Scholion.

379. Putant nonnulli corpus, quod celerius in fluido promovetur, plus velocitatis tempore dato amittere, quam aliud aeque denſum, priori ſimile, et aequale, ſed tardius in illo motum. Nam particulae fluidi a velociori corpore ſeparatae, ſunt multo plures, quam quae a ſegniori eodem tempore ſeparentur; et ideo primum corpus plus velocitatis tempore dato amittet, quam aliud. Quamvis autem hoc argumentum prima fronte efficax videatur; ſi tamen ſerio perpendatur, nullius roboris apparebit. Pone enim duo corpora A et B aeque denſa, aequalia, et ſimilia in eodem fluido promoveri. Pone praeterea corpus A eſſe duplo velocius alio B. Pone denique corpus B ſegnius motum, 1000 particulas fluidi uno momento temporis ſeparare; corpus autem A 2000. Cum igitur corpus A uno momento ſuperet cohaeſionem 2000 particularum, idem unius momenti medietate vincet cohaeſionem 1000 particularum. Atqui corpus B uno momento ſuperat cohaeſionem 1000 particularum; igitur reſiſtentia ex prima cauſa, quae (376) eſt vis conſtans, tempore duplo aget in cor-

corpus B, et ſimplo in corpus A, ideoque velocitas uno momento a corpore B amiſſa, dupla erit illius, quam A amittit unius momenti medietate. Sed corpus A ſequenti alia momenti medietate amittit velocitatem aequalem illi, quam amiſerat in priori; ergo velocitas uno momento a corpore B amiſſa, erit aequalis velocitati, quam uno momento amiſit alterum corpus A.

PROPOSITIO LIX.

380. *Si corpus finita quadam velocitate intra fluidum promoveatur, eius motus, ſepoſita reſiſtentia ex ſecunda cauſa, tempore infinite parvo pro aequabili ſumi poteſt.*

Corpus, quod intra fluidum promovetur, vocetur A. Tum finge alterum corpus B priori ſimile, et aequale verticaliter furſum proiici cum finita illa velocitate, qua A progredi incipit intra fluidum. Finge denique reſiſtentiam, quam patitur corpus A a partium fluidi tenacitate, eſſe aequalem illi, quam alterum corpus B ſurſum proiectum, a conſtanti vi gravitatis perpetuo experitur. His poſitis, cohaeſio mutua, ſive tenacitas partium fluidi, in quo progreditur corpus A, huic (375) reſiſtet eadem lege, qua vis gravitatis reſiſtit corpori B verticaliter aſcendenti, et ideo motus in utroque corpore idem erit. Sed motus corporis B cum finita velocitate verticaliter aſcendentis, tempore infinite parvo pro aequabili ſumi poteſt; ergo et motus corporis A cum finita velocitate in fluido progredientis, tempore infinite parvo pro aequabili ſumi poteſt.

CAPUT VIII.

De velocitatis decrementis, quae corpus progrediens in quieſcente fluido ſubit a prima, et ſecunda cauſa, dum hae ſeparatim in illud agunt.

DEFINITIO V.

381. DUm corpus in fluido promovetur, velocitas quam quovis momento amittit ob reſiſtentiam ortam ex prima, aut ſecunda cauſa, dicitur *decrementum velocitatis ortum ex prima, aut ſecunda cauſa.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO LX.

382. *Si duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia diverſis celeritatibus, variiſque temporibus in eodem fluido moveantur; decrementa velocitatis his temporibus orta ex prima cauſa, erunt directe ut tempora, quibus fiunt.*

Corpora A et B (Fig. 99.) aeque denſa, aequalia, et ſimilia temporibus T et *t* cum velocitatibus C et *c* in eodem fluido moveantur. Dico, decrementa velocitatis ex prima cauſa, quae ſubeunt temporibus T et *t*, eſſe directe ut haec tempora. Nam ſi tempora T et *t* ſupponantur eſſe aequalia inter ſe, etiam decrementa celeritatis in utroque corpore genita, (378) aequabuntur. Verum ſi tempus T ſit duplum temporis *t*, tunc tempus T poterit concipi ut diviſum in duas aequales partes, quarum ſingulae etiam erunt tempori *t* aequales. Sed in ſingulis hiſce partibus decrementum velocitatis corporis A aequale eſt (378) decremento velocitatis corporis B; igitur decrementum velocitatis corporis A tempore T productum, erit duplum decrementi velocitatis corporis B tempore *t* producti. Eadem ratione, ſi tempus T ſit triplum temporis *t*, etiam decrementum velocitatis corporis A tempore T productum, triplum erit decrementi velocitatis, quod tempore *t* producitur in corpore alio B; et ſic deinceps. Igitur generatim decrementa velocitatis corporum A et B erunt directe ut tempora, quibus fiunt.

PROPOSITIO LXI.

383. *Si duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia, quae diverſis celeritatibus in eodem fluido promoventur, inaequalibus temporibus infinite parvis ſpatiola aequalia abſolvant; decrementa velocitatis, quae a prima cauſa his tempuſculis patiuntur, erunt inverſe ut eorundem celeritates.*

Corpora A et B (Fig. 100.) aeque denſa, aequalia, et ſimilia cum celeritatibus C et *c* in eodem fluido progrediantur, temporibus autem T et *t* infinite parvis, et inaequalibus inter ſe, abſolvant aequalia ſpatiola S et *ſ*. Dico, decrementa velocitatis, quae ex prima cauſa his temporibus patiuntur, eſſe inverſe ut eorum velocitates C et *c*. Cum enim infinite parva ſint (ex hyp.) tempora T et *t*, motus corporum A et B erunt (380) hiſce tempuſculis uniformes. Atqui percurſa ſpatia S et *ſ* ſunt (ex hyp.) aequalia inter ſe; igitur tempus T erit ad tempus *t*, ut velocitas *c* ad velocitatem C. Vidimus autem (382) decrementum velocitatis corporis

Digitized by Google

ris A eſſe ad illud corporis B, ut tempus T ad tempus t; ergo etiam decrementum velocitatis corporis A erit ad illud corporis B, ut huius velocitas c ad alterius velocitatem C.

PROPOSITIO LXII.

384. *Si duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia eodem tempore infinite parvo, et cum diverſis velocitatibus intra idem fluidum progrediantur; decrementa velocitatis, quae a ſecunda cauſa tempuſculo illo ſubeunt, erunt directe ut quadrata velocitatum corporum eorundem.*

Corpora A et B (Fig. 101.) aeque denſa, aequalia, et ſimilia eodem tempore T infinite parvo, et cum velocitatibus C et c intra idem fluidum moveantur. Dico, decrementum velocitatis, quod corpus A ex ſecunda cauſa tempuſculo illo ſubit, eſſe ad decrementum velocitatis, quod interea patitur alterum corpus B, ut quadratum celeritatis C ad quadratum celeritatis c. Dum enim duae conſtantes vires tempore dato agunt in duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia, mutationes celeritatis in illis tempore dato ortae, ſunt viribus ipſis proportionales. Sed reſiſtentiae, quas ex ſecunda cauſa patiuntur corpora A et B, tempore infinite parvo vires conſtantes ſunt (361), et mutationes celeritatis, quas in corporibus A et B tempuſculo illo edunt, ſunt decrementa celeritatis genita in iiſdem; ergo et decrementum celeritatis factum in corpore A, erit ad illud, quod fit in corpore alio B, ut reſiſtentia quam ſubit A, ad illam quam ſubit B. Sed reſiſtentia quam ſubit A eſt (370. 371.) ad illam quam ſubit B, ut quadratum velocitatis C ad quadratum velocitatis c; ergo et decrementum velocitatis, quod patitur corpus A, erit ad decrementum velocitatis, quod interim ſubit aliud corpus B, ut quadratum celeritatis C ad quadratum celeritatis c.

PROPOSITIO LXIII.

385. Si *duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia cum eadem velocitate, diverſis autem temporibus infinite parvis intra idem fluidum moveantur; decrementa velocitatis, quae a ſecunda cauſa illis tempuſculis patiuntur, erunt directe ut tempuſcula, quibus fiunt.*

Corpora A et B (Fig. 102.) aeque denſa, aequalia, et ſimilia cum velocitate eadem C diverſis temporibus infinite parvis T et t in eodem fluido moveantur. Dico, decrementum velocitatis, quod ex ſecunda cauſa patitur corpus A tempore T, eſſe ad decrementum velocitatis, quod tempuſculo t ſubit alterum corpus B, ut tem-

tempuſculum T ad tempuſculum *t*. Dum enim duae aequales conſtantes vires temporibus inaequalibus in duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia agunt, mutationes velocitatis, quas in corporibus illis edunt, ſunt proportionales temporibus, quibus agunt. Sed reſiſtentiae ex ſecunda cauſa, quas ſubeunt corpora A et B infinite parvis temporibus T et *t*, vires conſtantes ſunt (361), et (373) aequales, ac praeterea mutationes velocitatis, quas in corporibus illis edunt, ſunt decrementa velocitatis in illis genita; ergo et decrementum velocitatis, quod tempuſculo T patitur corpus A, erit ad decrementum velocitatis, quod tempuſculo *t* ſubit alterum corpus B, ut tempuſculum T ad tempuſculum *t*.

PROPOSITIO LXIV.

386. *Si duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia cum diverſis celeritatibus, variiſque temporibus infinite parvis in eodem fluido moveantur; decrementa velocitatis, quae a ſecunda cauſa illis tempuſculis patiuntur, erunt in ratione compoſita ex ratione quadratorum velocitatum, et ex ratione tempuſculorum, quibus fiunt.*

Corpora A et B (Fig. 103.) aeque denſa, aequalia, et ſimilia cum diverſis celeritatibus C et *c*, variiſque temporibus infinite parvis T et *t* in eodem fluido moveantur. Dico, decrementum velocitatis, quod tempuſculo T patitur corpus A, eſſe ad illud, quod tempore *t* ſubit alterum corpus B, in ratione compoſita quadrati celeritatis C ad quadratum celeritatis *c*, et ex ratione temporis T ad tempus *t*. Finge enim eſſe alterum corpus E aeque denſum ac A et B, eiſque ſimile, et aequale, quod cum velocitate *c*, tempuſculo autem T in eodem fluido moveatur. Quia ergo corpora A et E aeque denſa, aequalia, et ſimilia tempuſculo eodem T cum diverſis velocitatibus C et *c* intra idem fluidum promoventur; decrementum celeritatis corporis A erit (384) ad illud corporis E, ut quadratum velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*. Rurſus quia corpora E et B aeque densa, aequalia, et ſimilia cum eadem velocitate *c*, diverſis autem temporibus T et *t* intra idem fluidum promoventur, decrementum velocitatis corporis E erit (385) ad illud corporis B, ut tempus T ad tempus *t*. Atqui decrementum velocitatis corporis A eſt ad illud corporis B in ratione compoſita ex ratione decrementi velocitatis corporis A ad decrementum velocitatis corporis E, et ex ratione decrementi velocitatis corporis E ad decrementum velocitatis corporis B; ergo etiam decrementum velocitatis corporis A erit ad decrementum velocitatis corporis B in ratione compoſita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*, et ex ratione temporis T ad tempus *t*.

LEM-

LEMMA.

387. *Duae rectae quaecunque* AB, GH (*Fig.* 105.) *ſunt inter ſe in ratione compoſita ex ratione directa quadrati* AB *ad quadratum* GH *et ex ratione inverſa* AB *ad* GH.

Super rectas AB, GH fiant quadrata ADCB, GKIH. Tum ſuper haec quadrata veluti baſes excitari intelligantur parallelepipeda duo recta FB, MH, quorum altitudines EB, SH ſint reſpective aequales rectis GH, AB. Cum itaque (ex conſtr.) ſit EB ad SH, ut GH ad AB, vel (ex conſtr.) ut HI ad BC; rectangulum EBCL aequabitur alteri SHIN. Iam ſi duo rectangula haec aequalia accipiantur ut baſes parallelepipedorum FB, MH; tunc rectae AB, GH eorum altitudines exhibebunt. Sed parallelepipeda habentia aequales baſes, ſunt inter ſe ut altitudines eorundem; ergo parallelepipedum FB erit ad aliud MH, ut AB ad GH. Sed parallelepipeda eadem FB, MH ſunt quoque in ratione compoſita ex ratione baſis ADCB ad baſim GKIH, et ex ratione altitudinis EB ad altitudinem SH; ergo etiam AB erit ad GH in ratione compoſita ex ratione baſis ADCB ad baſim GKIH, et ex ratione altitudinis EB ad altitudinem SH. Sed baſis ADCB eſt (ex conſtr.) quadratum rectae AB, et baſis GKIH quadratum rectae GH; ergo etiam AB erit ad GH in ratione compoſita ex ratione quadrati AB ad quadratum GH, et ex ratione EB ad SH. Eſt autem EB (ex conſtr.) aequalis ipſi GH, et SH ipſi AB; ergo et AB erit ad GH in ratione compoſita ex ratione quadrati AB ad quadratum GH, et ex ratione GH ad AB, quae eſt inverſa rationis AB ad GH.

PROPOSITIO LXV.

388. *Si duo corpora aeque denſa, aequalia, et ſimilia, quae diverſis celeritatibus in eodem fluido promoventur temporibus infinite parvis, et inaequalibus ſpatiola aequalia abſolvant; decrementa velocitatis, quae a ſecunda cauſa hiſce tempuſculis patiuntur, erunt directe ut eorum velocitates.*

Corpora A et B (Fig. 100.) aeque denſa, aequalia, et ſimilia velocitatibus C et *c* in eodem fluido moveantur; temporibus autem infinite parvis, et inaequalibus T et *t* abſolvant aequalia ſpatiola S et *ſ*. Dico, decrementa velocitatis, quae a ſecunda cauſa tempuſculis illis ſubeunt corpora A et B, eſſe directe ut eorum velocitates C et *c*. Cum enim tempora T et *t* ſint infinite parva, motus corporum A et B erunt (362) hiſce temporibus uniformes. Sed

Digitized by Google

etiam ſpatiola S et ſ hoc motu aequabili abſoluta, ſunt (ex hyp.) aequalia inter ſe; igitur tempus T erit ad tempus *t*, ut velocitas *c* ad velocitatem C. Vidimus autem (386) decrementum velocitatis corporis A eſſe ad decrementum velocitatis corporis B in ratione compoſita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*, et ex ratione temporis T ad tempus *t*; ergo et decrementum velocitatis corporis A erit ad illud corporis B in ratione compoſita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*, et ex ratione velocitatis *c* ad velocitatem C. Sed etiam velocitas C eſt (387) ad velocitatem *c* in ratione compoſita ex ratione quadrati velocitatis C ad quadratum velocitatis *c*, et ex ratione velocitatis *c* ad velocitatem C; ergo etiam decrementum velocitatis corporis A erit ad decrementum velocitatis corporis B, ut velocitas C primi A ad velocitatem *c* ſecundi B.

PROPOSITIO LXVI.

389. *Determinare longitudinem ſpatii a corpore intra fluidum percurrendam, ut idem ob ſolam reſiſtentiam ex prima cauſa ortam, omnem amittat velocitatem.*

Finge corpus iuxta rectam B A (Fig. 104.) cum velocitate B C in fluido promoveri, et a ſola tenacitate partium fluidi retardari. Finge praeterea reſiſtentiam, quam indeſinenter patitur ab hac cauſa, aequalem eſſe reſiſtentiae gravitatis, quam idem corpus in vacuo pateretur, ſi iuxta rectam B A ſurſum proiectum eſſet. Denique finge A B eſſe altitudinem illam, ex qua corpus libere deſcendendo, velocitatem B C acquirere poteſt. Dico, ipſum ſpatio B A percurſo, omnem amiſſurum velocitatem. Nam corpus, quod in recta B A, et cum velocitate B C in fluido motum, a ſola tenacitate partium fluidi retardatur, habet (374) in quolibet ſpatii B A puncto eandem velocitatem, quam ibi haberet, ſi cum velocitate B C, et iuxta directionem B A ſurſum in vacuo proiectum eſſet. Atqui corpus in vacuo ſic proiectum, nullam velocitatem haberet in puncto A, hoc eſt omnem amitteret velocitatem cum perveniſſet ad punctum A; ergo et idem corpus, dum in fluido promovetur, totam amittet velocitatem, ubi pervenerit uſque ad A, et ideo B A erit longitudo ſpatii a corpore intra fluidum percurrenda, ut idem ob ſolam reſiſtentiam ortam a prima cauſa, omnem prorſus amittat velocitatem.

PROPOSITIO LXVII.

390. *Determinare celeritatem, quam corpus in fluido motum, ha-*

Digitized by Google

habet in ſingulis punctis ſpatii, quod percurrit, dum a ſola tenacitate partium ejusdem fluidi retardatur.

Horizontalis recta BC (Fig. 104.) exponat celeritatem, quam in principio habet corpus, dum intra fluidum promovetur. Verticalis autem recta BA referat (389) ſpatium, quo percurſo, amittat corpus omnem celeritatem, dum a ſola tenacitate partium fluidi retardatur. Sumpta deinde poſt rectas AB et BC tertia proportionali AF, vertice A, et parametro AF deſcribatur circa axem AB parabola AEC. Demum ex quovis alio puncto D axis AB agatur ordinata DE, quae parallela erit alteri ordinatae BC. Dico, ordinatam DE exponere celeritatem, quam habet corpus in puncto D. Nam ſi idem corpus cum velocitate BC ſurſum proiici concipiatur in recta BA, ipſum in quovis puncto ſpatii ſui BA eam habebit (374) celeritatem, quam ibi habet, dum in recta BA, et cum velocitate BC progreditur intra fluidum. Atqui dum corpus intra fluidum promovetur, nullam (ex conſtr.) velocitatem habet in puncto A; ergo et idem corpus dum ſurſum aſcendit in recta BA, nullam habebit velocitatem in puncto A, hoc eſt totam velocitatem in puncto A amittet. Sed quando corpus aſcendens in recta BA, totam velocitatem deperdit in puncto A, quadratum eius velocitatis in B eſt ad quadratum eius velocitatis in D, ut AB ad AD; ergo etiam dum idem corpus in recta BA incedens, a ſola tenacitate partium fluidi retardatur, quadratum eius velocitatis in B erit ad quadratum velocitatis in D, ut AB ad AD. Sed etiam quadratum ordinatae BC eſt ad quadratum ordinatae DE, ut AB ad AD; ergo etiam quadratum velocitatis in B erit ad quadratum velocitatis in D, ut quadratum ordinatae BC ad quadratum ordinatae DE, ideoque et velocitas corporis in B erit ad velocitatem eius in D, ut ordinata BC ad ordinatam DE. Sed velocitas corporis in B exponitur (ex hyp.) per ordinatam BC; ergo et velocitas eius in D exponetur per ordinatam DE. Pari modo etiam determinabitur velocitas corporis in quovis altero puncto rectae AB.

Corollarium I.

391. Hinc ſi ſpatiola B*b*, D*d* ſint infinite parva, et aequalia inter ſe, decrementa velocitatis IC, GE orta ex prima cauſa dum haec ſpatiola percurruntur, erunt inverſe ut ordinatae BC, DE; haec ſiquidem decrementa ſunt inverſe (383) ut velocitates in B et D, quae ſunt directe (390) ut ordinatae BC, DE.

Corollarium II.

392. Si ergo in parabola AEC ſumptis B*b*, D*d* infinite parvis, et aequalibus inter ſe, agantur ordinatae infinite propinquae

Digitized by Google

BC et bc, DE et de, ducanturque cI, eG parallelae axi AB; differentiae IC, GE ordinatarum BC et bc, DE et de erunt inverſe (391) ut hae ordinatae BC, DE. Quod etiam ex ſola conſideratione parabolae deduci potuiſſet.

DEFINITIO VI.

393. Si recta AB (Fig. 106.) ſecetur in partes AD, DF, FH, &c. inter ſe aequales, et infinite parvas, indeque ad eam ex punctis ſingulis diviſionum excitentur perpendiculares AC, DE, FG, &c. infinite parum invicem differentes, et quae ſint in geometrica proportione; curva CMK traducta per illarum extremitates C, E, G, I, &c. dicitur *Logarithmica*, cuius *axis* eſt recta AB.

LEMMA I.

394. *Ubicunque ponatur initium abſciſſarum in logarithmica, ipſae erunt ſemper logarithmi reſpondentium ordinatarum.*

I. Sit primo in A (Fig. 106.) initium abſciſſarum in logarithmica CMK. Cum ſint (393) aequales AD, DF, FH, HV, &c., abſciſſae AD, AF, AH, AV, &c. erunt in aritmetica proportione. Atqui ordinatae DE, FG, HI, VZ &c. ſunt (393) in geometrica proportione; ergo abſciſſae AD, AF, AH, AV, &c. erunt logarithmi reſpondentium ordinatarum DE, FG, HI, VZ, &c.

II. Sit deinde initium abſciſſarum in puncto L. Quoniam ſunt aequales VH, HF, FD, DA &c., rectae LV, LH, LF, LD, &c. erunt in arithmetica proportione. Atqui ordinatae VZ, HI, FG, DE, &c. ſunt (393) in geometrica proportione; ergo abſciſſae LV, LH, LF, LD, &c. erunt logarithmi reſpondentium ordinatarum VZ, HI, FG, DE, &c.

LEMMA II.

395. *Si ordinatae* AC, HI *intercipiant ſegmentum axis* AH *aequale ſegmento* LR, *quod intercipiunt duae aliae ordinatae* LM, RS; *erit* AC *ad* HI, *ut* LM *ad* RS.

Ratio AC ad HI componitur ex rationibus AC ad DE, DE ad FG, et FG ad HI. Ratio quoque LM ad RS componitur ex rationibus LM ad NO, NO ad PQ, et PQ ad RS. Atqui ſingulae rationes, quae componunt rationem AC ad HI, ſunt (393) aequales ſingulis rationibus, quae componunt rationem LM ad RS, et propter aequalia ſegmenta axis AH, LR, idem eſt numerus

ca-

Digitized by Google

earundem; ergo aequales pariter erunt compoſitae rationes, ſive AC erit ad HI, ut LM ad RS.

COROLLARIUM.

396. Hinc ſi tres ordinatae intercipiant aequalia ſegmenta axis; ipſae erunt continue proportionales. Patet id ex lemmate praecedenti; eſt enim eius caſus particularis, in quo puncta H et L ſibi congruere concipiantur.

LEMMA III.

397. *Logarithmica* CMK *ſemper ad axem* AB *accedit, et quidem ultra quoſcunque limites, ita tamen ut nunquam conveniat cum eodem.*

Quando ratio quaecunque maioris inaequalitatis ſemper continuatur, (a) pervenitur tandem ad quantitatem minorem quacunque data. Sed in logarithmica CMK ratio ordinatae AC ad ordinatam DE eſt ratio maioris inaequalitatis, eaque ſemper continuatur; ergo tandem pervenietur ad ordinatam minorem quacunque data, et ideo logarithmica CMK ſupra quoſcunque limites ad axem AB accedet. Non poterit tamen unquam concurrere cum eodem. Nam, ſi fieri poteſt, logarithmicae punctum K concurrat cum axe AB in aliquo puncto, ut B, et diviſa AB bifariam in puncto Y, agatur ordinata YW. Quia ordinatae AC, YW intercipiunt axis ſegmentum AY aequale ſegmento YB, quod intercipiunt ordinatae YW, BK; erit (396) AC ad YW, ut YW ad BK, unde quadratum YW aequabitur rectangulo ſub AC, et BK. Sed cum logarithmicae punctum K cadat (ex hyp.) in axeos punctum B, ordinata BK nihilo eſt aequalis, atque ita nihilo etiam aequatur rectangulum ſub rectis AC, et BK; ergo et nihilo aequale erit YW quadratum, quod eſt abſurdum. Falſo itaque ponebatur, quod tandem logarithmica conveniret cum eius axe AB in B, qui proinde *aſymptotus* eius erit.

LEMMA IV.

398. *Si in eadem logarithmica* CMK *ſit* AC *ad* HI, *ut* LM *ad* RS; *axis ſegmenta* AH, LR *intercepta ab his ordinatis, erunt aequalia inter ſe.*

Segmentum AH ſit, ſi fieri poteſt, minus ſegmento LR, et ſumpto ſegmento LP alteri AH aequali, ordinetur PQ. Cum itaque ſint aequalia ſegmenta AH, LP, erit (395) AC ad HI, ut LM ad

(a) Lemma 2. Prop. 2. Lib. VI. Geometriae Taqueti.

Digitized by Google

ad PQ. Sed etiam AC eſt (ex hyp.) ad HI, ut LM ad RS; ergo et LM erit ad PQ, ut eadem LM ad RS, ideoque aequabuntur ordinatae PQ, RS, quod (397) eſt abſurdum. Non ergo ſegmentum AH eſt alio LR minus. Pari modo oſtendetur eodem non eſſe maius; conſequens ergo erit, ut ſit ipſi aequale.

LEMMA V.

399. *Segmentum axis* DV, *quod intercipiunt duae quaelibet ordinatae* DE, VZ, *eſt logarithmus rationis, quam ipſae inter ſe habent.*

Si una quantitas per aliam dividatur, quotus exprimit rationem, quae eſt inter illas, et differentia logarithmorum earum quantitatum eſt logarithmus eiuſdem quoti. Sed ſumpto in L initio abſciſſarum, abſciſſae LD, LV ſunt (394) logarithmi ordinatarum DE, VZ, et ſegmentum DV, quod intercipiunt hae ordinatae, eſt differentia logarithmorum ad ordinatas has pertinentium; ergo ſegmentum DV erit logarithmus quoti, qui prodit, ſi ordinata DE dividatur per aliam VZ. Sed quotus hic exprimit rationem, quae intercedit inter ordinatas DE, VZ; ergo etiam ſegmentum DV erit logarithmus rationis, quam inter ſe habent ordinatae DE, VZ.

COROLLARIUM.

400. Hinc ſi ratio AC ad HI aequetur rationi LM ad RS; logarithmus primae rationis logarithmo ſecundae aequalis erit. Cum enim AC ſit ad HI, ut LM ad RS, aequalia erunt (398) axis ſegmenta AH, LR. Sed primum eſt (399) logarithmus rationis AC ad HI, et alterum logarithmus rationis LM ad RS; ergo et logarithmus primae rationis logarithmo ſecundae aequalis erit.

LEMMA VI.

401. *Si quatuor ordinatae* AC, HI, LM, RS *intercipiant aequalia axis ſegmenta* AH, LR; *differentia primae a ſecunda erit ad differentiam tertiae a quarta, ut prima ad tertiam, ſive ut ſecunda ad quartam.*

Agantur IT, SX ad aſymptotum parallelae, ut ita prodeant AT, LX reſpective aequales ordinatis HI, RS. Quoniam ordinatae AC, HI, LM, RS intercipiunt aequalia axis ſegmenta AH, LR; erit (395) AC ad HI, ut LM ad RS. Eſt autem AT aequalis ipſi HI, et LX ipſi RS; ergo et AC erit ad AT, ut LM ad LX, et convertendo, AC erit ad TC, ut LM ad XM, et invertendo, erit TC ad AC, ut XM ad LM, et denique permutan-

Digitized by Google

tando, TC erit ad XM, ut AC ad LM, vel ut HI ad RS.

COROLLARIUM.

402. Unde ſi in logarithmica tres ordinatae intercipiant aequalia ſegmenta axis; differentia primae a ſecunda erit ad differentiam ſecundae a tertia, ut prima ad ſecundam, aut ut ſecunda ad tertiam. Patet hoc ex lemmate praecedenti; eſt enim caſus particularis eiuſdem, in quo duo puncta H et L ſibi congruere concipiantur.

LEMMA VII.

403. *Si ex punctis quibuslibet* C *et* M *logarithmicae* CMR (*Fig.* 107.) *agantur tangentes* CT, MV, *aſymptoto occurrentes in* T *et* V; *ſubtangentes inde ortae* AT, LV *invicem aequabuntur.*

Ductis ex C et M ordinatis CA, ML, in aſymptoto AB ſumantur ſegmenta aequalia infinite parva AD, LN, et ductis ſubinde ordinatis DE, NO, quae erunt (395) proportionales prioribus CA, ML, agantur E*c*, O*m* parallelae ad aſymptotum AB. Quia arcus CE eſt infinite parvus, ipſe accipi poterit velut recta, ſive pars infinite parva tangentis CT; unde ob triangulum C*c*E ſimile alteri CAT, erit C*c* ad *c*E, ut CA ad AT, et permutando, erit C*c* ad CA, ut *c*E ad AT. Rurſus ob triangulum M*m*O ſimile alteri MLV, erit M*m* ad *m*O, ut ML ad LV, et permutando, erit M*m* ad ML, ut *m*O ad LV. Sed cum C*c* ſit (401) ad M*m*, ut CA ad ML, etiam permutando, C*c* erit ad CA, ut M*m* ad ML; ergo *c*E erit ad AT, ut *m*O ad LV. Sunt vero aequales *c*E, *m*O; ergo etiam aequabuntur AT, LV.

COROLLARIUM I.

404. Si manente tam magnitudine ordinatarum AC, DE, FG, HI, &c. (Fig. 106.), quam aequalitate mutua diſtantiarum AD, DF, FH, &c., diſtantiae hae omnes magnitudine augeantur, aut minuantur; tunc logarithmica, eiuſque ſubtangens in eadem ratione mutari debent, in qua diſtantiae hae mutantur. Nam ſi in triangulo C*c*E (Fig. 107.) manente latere C*c*, mutetur *c*E; utique in triangulo CAT, cuius latus CA ſervatur, in eadem ratione cum *c*E mutabitur quoque AT.

COROLLARIUM II.

405. Quia in eadem ratione, in qua mutantur diſtantiae minores AD, DF, FH, &c. (Fig. 106.), mutatur pariter harum ſumma AH, quae eſt (399) logarithmus rationis AC ad HI; utique ſi duae ordinatae PB, SN (Fig. 110.) unius logarithmicae BNR

ſint

Digitized by Google

ſint reſpective aequales duabus aliis ordinatis VM, QK logarithmicae alterius BKC, etiam PS, ſeu logarithmus rationis PB ad SN erit (404) ad VQ, ſeu logarithmum rationis VM ad QK, ut ſubtangens PT logarithmicae BNR ad ſubtangentem VO, vel (403) HZ logarithmicae BKC.

LEMMA VIII.

406. *Si duae ordinatae* PB, SN (*Fig.* 110.) *unius logarithmicae* BNR *ſint proportionales duabus aliis ordinatis* HB, LF *cuiuscunque alterius logarithmicae* BKC, *hoc eſt ratio* PB *ad* SN *aequetur rationi* HB *ad* LF; *etiam logarithmus* PS *primae rationis erit ad logarithmum* HL *ſecundae, ut ſubtangens* PT *ad ſubtangentem* HZ.

In logarithmica BKC ſumptae intelligantur ordinatae VM, QK reſpective aequales ipſis PB, SN alterius logarithmicae BNR; eritque ratio PB ad SN aequalis rationi VM ad QK. Sed eadem quoque ratio PB ad SN (ex hyp.) eſt aequalis rationi HB ad LF; ergo etiam ratio HB ad LF aequabitur rationi VM ad QK, et ideo logarithmus rationis HB ad LF aequabitur (400) logarithmo rationis VM ad QK. Sed logarithmus rationis PB ad SN eſt (405) ad logarithmum rationis VM ad QK, ut ſubtangens PT ad ſubtangentem VO, vel (403) HZ; ergo et logarithmus rationis PB ad SN erit ad logarithmum rationis HB ad LF, ut ſubtangens PT ad ſubtangentem HZ.

COROLLARIUM.

407. Hinc ſi ſubtangens PT logarithmicae BNR ſit dupla ſubtangentis HZ logarithmicae alterius BKC; etiam logarithmus PS rationis PB ad SN duplus erit (406) logarithmi HL rationis HB ad LF.

SCHOLION I.

408. Quamvis logarithmus PS ſit duplus alterius logarithmi HL, nihilominus ſi ambo exprimantur numeris tabularum, hi numeri iidem erunt. Numerus enim qui in tabulis repraeſentat logarithmum PS, habet unitatem (404) duplo maiorem illa, quam habet numerus repraeſentans logarithmum HL; unde etſi logarithmus PS ſit magnitudine duplo maior quam HL, uterque tamen eodem prorſus tabularum numero exprimetur. Idem pariter eſt dicendum de ſubtangentibus PT, HZ, quae licet ſint magnitudine inaequales, eodem tamen tabularum numero exprimentur.

Con-

Conſequenter quaelibet logarithmica ſumi poteſt pro logarithmica tabularum.

Scholion II.

409. In logarithmorum tabulis, quas habemus, logarithmus unitatis eſt 0, ſeu 0.0000000; logarithmus autem denarii eſt 1, ſeu 1.0000000, et propterea logarithmus rationis denarii ad unitatem erit 1.0000000. Logarithmi rationum intermediarum fractionibus decimalibus exprimuntur. Subtangens denique logarithmicae tabularum eſt 0.4342945.

Propositio LXVIII.

410. *Si aſymptoti pars* AB (*Fig.* 106.) *referat ſpatium percurſum a corpore intra fluidum, cuius partium tenacitas nulla ſit, et ordinata* AC *logarithmicae* CMK *exponat eius celeritatem in initio, ſeu puncto* A; *etiam reliquae ordinatae ſingulis punctis ſpatii reſpondentes, exponent celeritates eiſdem punctis convenientes.*

Sumptis in recta AB infinite parvis, et aequalibus partibus AD, DF, FH, HV, &c., agantur ordinatae DE, FG, HI, &c. Ducantur quoque E*e*, G*e* ad aſymptotum parallelae. Quia ſpatiola AD, DF ſunt infinite parva, et aequalia inter ſe; decrementum celeritatis, quod ſubit corpus dum ſpatium AD percurrit, erit (388) ad illud, quod patitur dum abſolvit ſpatium DF, ut velocitas in A ad velocitatem in D. Sed cum C*c* ſit ad E*e* (402), ut AC ad DE, etiam decrementum ordinatae AC eſt ad decrementum ordinatae DE, ut ordinata AC ad ordinatam DE; ergo et velocitas in A erit ad velocitatem in D, ut ordinata AC ad ordinatam DE. Sed velocitas in A eſt (ex hyp.) expoſita per AC; ergo et velocitas in D repraeſentabitur per DE. Pari modo oſtendam, velocitates in punctis F, H, V, &c. exponi per ordinatas illis reſpondentes FG, HI, VZ, &c.

Corollarium I.

411. Cum nullum in aſymptoto punctum ſit, cui non reſpondeat aliqua ordinata; patet, corpus motum in fluido, cuius partium tenacitas nulla ſit, amittere nunquam poſſe totam eius velocitatem.

Corollarium II.

412. Quia dum aequalia ſunt ſpatia AV, VN, ordinatae AC, VZ, NO ſunt (396) continue proportionales; ſequitur, etiam

corporis velocitates in punctis A, V, N eſſe continue proportionales.

PROPOSITIO LXIX.

413. *Tempora deſignare, quibus cylindrus motus in fluido, cuius partium tenacitas nulla eſt, ſucceſſive abſolvit ſpatia infinite parva, et aequalia inter ſe.*

Sit AZ (Fig. 108.) axis, aut aſymptotus logarithmicae BKY, et BM eius continuatio in ſitu contrario conſtituta. Corpus praeterea, quod in initio, ſeu puncto A habet velocitatem expoſitam recta AB, moveatur in axe AZ, et tempuſculis inaequalibus abſolvat ſpatiola infinite parva, et aequalia AC, CP, PQ, &c. Quia ordinatae AB et CF, AB et CD intercipiunt aequalia ſegmenta axis, erit (395) CD ad AB, ut AB ad CF. Eandem ob cauſam, PE (395) erit ad CD, ut CF ad PG, et QK ad PE, ut PG ad QH, et ſic deinceps, ita ut augeantur ordinatae, quae terminantur a logarithmicae tractu BM, et e contrario minuantur reſpondentes, quae terminantur ab altero tractu BY, ſintque primae inverſe ut ſecundae. Iam cum aequalia ſint ſpatiola AC, CP, eaque (361) motu aequabili percurrantur; tempus quo percurritur AC, erit ad tempus quo abſolvitur CP, ut velocitas in C ad velocitatem in A, ſive (410) ut CD ad AB. Vidimus autem eſſe CD ad AB, ut AB ad CF; ergo et primum tempus ad aliud erit, ut AB ad CF, vel (402) ut F*f* ad G*g*, et ideo ſi tempus quo percurritur AC, ſit expoſitum per F*f*, etiam tempus quo abſolvitur CP, repraeſentabitur per G*g*. Rurſus tempus quo abſolvitur CP, erit ad tempus quo abſolvitur PQ, ut velocitas in Q ad velocitatem in P, ſive (410) ut QK ad PE, vel (ex demonſtr.) ut PG ad QH, aut (402) ut G*g* ad H*h*. Vidimus autem tempus quo percurritur CP, exponi recta G*g*; igitur etiam tempus quo abſolvitur PQ, repraeſentabitur recta H*h*. Simili modo oſtendam, quod tempora inſumpta in percurrendis ſpatiolis QR, RS, ST, expoſita erunt rectis I*i*, L*l*, M*m*.

PROPOSITIO LXX.

414. *Tempora quibus cylindrus percurrit ſpatia aequalia AQ, QT, ſunt inverſe ut celeritates in initio, et inverſe ut celeritates in fine eorundem ſpatiorum.*

I. Tempus quo corpus ſpatium AQ abſolvit exponitur (413) rectis ſimul F*f*, G*g*, H*h*, ſeu recta HN; tempus autem quo idem cor-

corpus ſpatium QT percurrit, repraeſentatur per rectas ſimul I*i*, L*l*, M*m*, ſeu per rectam MO. Igitur primum tempus ad aliud erit, ut HN ad MO. Verum ob continue (395) proportionales AB, QH, TM, eſt (402) HN ad MO, ut AB ad QH, vel (413) ut QK ad AB, aut (410) ut velocitas in Q ad velocitatem in A; ergo tempus quo corpus ſpatium AQ percurrit, erit ad tempus quo abſolvit aliud QT, ut velocitas in Q ad velocitatem in A, hoc eſt tempora, quibus corpus abſolvit ſpatia AQ, QT, erunt inverſe ut celeritates in A, et Q, ſive in initio eorundem ſpatiorum.

II. Rurſus cum etiam HN ſit (402) ad MO, ut QH ad TM, aut (413) ut TY ad QK, vel (410) ut velocitas in T ad velocitatem in Q; utique tempus quo corpus ſpatium AQ percurrit, erit ad tempus quo ſequens aliud QT abſolvit, ut velocitas in T ad velocitatem in Q, hoc eſt tempora, quibus corpus abſolvit ſpatia AQ, QT, erunt inverſe ut celeritates in Q et T, ſive in fine eorundem ſpatiorum.

LEMMA I.

415. *Datis in logarithmica* CMR (*Fig.* 107.) *duabus ordinatis infinite propinquis* AC, DE, *parabolam deſcribere, quae axem habeat in aſymptoto eius* AB, *et tranſeat per puncta* C, *et* E.

Subtangens AT logarithmicae CMR biſecetur in puncto H. Deinde poſt rectas HA, AC quaeratur tertia proportionalis GK. Vertice tandem H, parametro autem GK circa axem HA fiat parabola HF. Dico, hanc quoque tranſire per puncta C, et E. Cum recta AC ſit perpendicularis ad axem HA parabolae HF, et ſimul ſit (ex conſtr.) media proportionalis inter eius abſciſſam HB, et parametrum GK; eadem etiam erit ordinata eiuſdem parabolae HF, quae proinde tranſibit per punctum C. Praeterea cum AT ſit (ex conſtr.) dupla abſciſſae HA parabolae HFC, recta CT continget parabolam in puncto C. Sed eadem CT quoque logarithmicam (ex hyp.) tangit eodem in puncto C; igitur duo arcus parabolae, et logarithmicae, quos intercipiunt ordinatae infinite proximae AC, DE, neceſſario congruent inter ſe. Atqui arcus logarithmicae interceptus ab eius ordinatis AC, DE, eſt CE; igitur etiam arcus parabolae, qui intercipitur ab iiſdem, erit CE, ideoque parabola tranſibit quoque per punctum E.

LEMMA II.

416. *Si corpus surſum proiectum in recta* AB (*Fig.* 107.), *et ſola gravitatis vi retardatum, habeat in punctis infinite proximis* A

et D *velocitates expoſitas ab ordinatis* AC, DE *logarithmicae* CMR; *medietas* AH *eius ſubtangentis* AT *erit altitudo, ad quam aſcendere poteſt*.

Si fieri poteſt, altitudo ad quam aſcendere poteſt corpus, ſit AP, maior quam AH. Tum circa axem AH (415) deſcribatur parabola HFC, quae tranſeat per C et E. Quoniam ergo rectae AC, DE ſunt ordinatae parabolae HFC; abſciſſa AH erit ad abſciſſam DH, ut quadratum ordinatae AC ad quadratum ordinatae DE. Sed cum AP ſit (ex hyp.) altitudo, ad quam aſcendere poteſt corpus, erit AP ad DP, ut quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in D, vel (ex hyp.) ut quadratum ordinatae AC ad quadratum ordinatae DE; ergo etiam AH erit ad DH, ut AP ad DP, et dividendo, AD erit ad DH, ut eadem AD ad DP, ideoque aequabuntur DH, DP, atque ita etiam AH, AP, contra hypotheſim. Igitur altitudo, ad quam aſcendere poteſt corpus, non maior eſt recta AH. Simili ratiocinio etiam demonſtrabo, eandem quoque non eſſe minorem recta AH; conſequens ergo erit, ut ipſi AH aequetur.

Corollarium.

417. Quia medietas AH ſubtangentis AT eſt (416) altitudo, ad quam corpus cum velocitate AC in altum proiectum aſcendere poteſt; medietas quoque AH ſubtangentis AT erit altitudo, ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirere poteſt velocitatem AC.

Propositio LXXI.

418. *Ordinata* AC (*Fig.* 107.) *logarithmicae* CMR *exponat celeritatem, qua ſit cylindrus rectus iuxta ſui axeos directionem in fluido moveatur, reſiſtentia ex ſecunda cauſa eiuſdem ponderi ſit aequalis. Dico, medietatem* AH *ſubtangentis eius* AT *eſſe altitudinem illam, ex qua corpus in vacuo cadendo, velocitatem* AC *acquirere poteſt.*

Finge cylindrum rectum cum velocitate AC intra fluidum promoveri, indeque cum hac eadem velocitate ſurſum proiectum eſſe in recta AB, et ſola gravitatis vi retardari. Hoc poſito, actio reſiſtentiae quam ſubit cylindrus a fluido in puncto A, aequalis eſt (ex hyp.) eius ponderi, ſeu actioni ex gravitate, quae retardat motum eiuſdem corporis aſcendentis. Sed hae actiones immediate transferunt idem corpus, quando in hoc agunt; ergo etiam aequaliter retardabunt eiuſdem motum, ideoque velocitas amiſſa a corpore in primo momento, quo intra fluidum promovetur ex A in

D,

Digitized by Google

D, aequabitur velocitati, quam in momento aequali idem corpus amittit aſcendendo ex A in D. Atqui ducta ordinata DE infinite proxima ipſi AC, eſt (410) Cc velocitas, quam in fluido amittit corpus percurrendo AD; ergo etiam Cc erit velocitas, quam idem corpus amittet aſcendendo ex A in D. Habebat autem in puncto A (ex hyp.) velocitatem AC; ergo in punto D habebit velocitatem DE. Itaque corpus ſurſum proiectum in recta AB, et ſola gravitatis vi retardatum, habet in punctis infinite proximis A et D celeritates expoſitas ab ordinatis AC, DE logarithmicae CMR; unde medietas AH ſubtangentis AT erit (417) altitudo, ex qua corpus in vacuo cadendo, velocitatem AC acquirit.

Corollarium I.

419. Quia (409) ſubtangens AT expreſſa numeris tabularum, eſt 0.4342945; eius medietas, ſive altitudo AH (ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, qua ſi in fluido moveatur, patitur reſiſtentiam ponderi eius aequalem) erit 0.2171472.

Corollarium II.

420. Cum gravitas ſpecifica fluidi ſit (366) ad illam cylindri, ut dimidia altitudo cylindri ad altitudinem AH (ex qua cylindrus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, qua ſi in fluido moveatur, patitur reſiſtentiam ponderi eius aequalem); manifeſtum eſt, altitudinem hanc AH per notas quoque menſuras dari.

Corollarium III.

421. Hinc eadem altitudo AH duobus numeris exprimetur, quorum alter depromitur ex decimalibus numeris tabularum, alter autem ex numeris abſolutis.

Propositio LXXII.

422. *Si cylindrus rectus iuxta ſui axeos directionem in fluido moveatur, cuius partium tenacitas nulla ſit; ſpatium invenire, in quo percurrendo amittet dimidium velocitatis, quam in ipſo initio motus habet.*

Sit AC (Fig. 107.) velocitas corporis in initio, ſeu puncto A, et ſpatium in quo percurrendo amittit corpus dimidium velocitatis, ſit AP; eritque (410) PI velocitas in fine ſpatii, ſive in puncto P, et ideo ratio AC ad PI erit (ex hyp.) eadem cum ratione 1 ad $\frac{1}{2}$, ſive 2 ad 1. Atqui AP expreſſa numeris tabularum, eſt (399) logarithmus rationis AC ad PI; igitur etiam erit logarithmus rationis 2 ad 1. Sed ſi ex logarithmo numeri 2, qui eſt 0.3010300, ſub-

ſubtrahas logarithmum numeri 1, qui eſt 0.0000000, reſiduum 0.3010300 erit logarithmus rationis 2 ad 1; ergo etiam A P expreſſa numeris tabularum, erit 0.3010300. Unde dimidium ſubtangentis A T, hoc eſt (419) A H expreſſa numeris tabularum, erit ad A P iiſdem numeris deſignatam, ut 0.2171472 ad 0.3010300, ſive ut 10000000 ad 13862946, aut quamproxime ut 10000 ad 13863. Sed dimidium ſubtangentis A T, hoc eſt A H expreſſa numeris tabularum, eſt ad A P iiſdem numeris deſignatam, ut A H (altitudo ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, quae dat reſiſtentiam ponderi eius aequalem) ad ſpatium A P; igitur 10000 erit ad 13863, ut altitudo A H ad ſpatium quaeſitum A P. Sed altitudo A H (420) per notas menſuras datur; ergo etiam invenietur quaeſitum ſpatium A P.

PROPOSITIO LXXIII.

423. *Si cylindrus rectus iuxta ſui axeos directionem moveatur in fluido, cuius partes nullam habent tenacitatem; dimidia altitudo cylindri erit ad ſpatium, in quo percurrendo amittit dimidium velocitatis, in ratione compoſita ex ratione gravitatis ſpecificae fluidi ad cylindri ſpecificam gravitatem, et ex ratione numeri* 10000 *ad numerum* 13863.

Dimidia altitudo cylindri eſt (366) ad altitudinem A H (ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem, quae dat reſiſtentiam ponderi eius aequalem), ut gravitas ſpecifica fluidi ad cylindri ſpecificam gravitatem. Rurſus eadem altitudo A H eſt (422) ad ſpatium A P, in quo percurrendo corpus amittit dimidium velocitatis, ut 10000 ad 13863; ergo ex aequo, et ex compoſitione rationis, dimidia altitudo cylindri erit ad ſpatium A P, in quo percurrendo amittit corpus dimidium velocitatis, in ratione compoſita ex ratione gravitatis ſpecificae fluidi ad ſpecificam gravitatem cylindri, et ex ratione numeri 10000 ad numerum 13863.

COROLLARIUM.

424. Unde ſi fluidum, et cylindrus eandem habeant ſpecificam gravitatem; dimidia altitudo cylindri erit ad ſpatium, in quo percurrendo hic amittit dimidium eius velocitatis, ut 10000 ad 13863.

SCHOLION.

425. Simili modo etiam demonſtrabitur, quod ſi ſphaera in fluido mota, eandem cum hoc habeat ſpecificam gravitatem; duae tertiae partes diametri ſphaerae erunt ad ſpatium in quo percurrendo amittit ſphaera dimidium velocitatis, ut 10000 ad 13863.

CA-

Digitized by Google

CAPUT IX.

De velocitatis decrementis, quae corpus incedens in ſtagnante fluido ſubit a prima, et ſecunda cauſa, dum hae ſimul in illud agunt.

LEMMA I.

426. *Si in axe* AB (*Fig.* 104) *parabolae* AEC *ſumptis infinite parvis, et inaequalibus rectis* Bm, Dd, *agantur ordinatae infinite propinquae* BC *et* mn, DE *et* de, *ducanturque* nH, eG *parallelae ad axem* AB; *differentiae* HC, GE *vicinarum ordinatarum* BC *et* mn, DE *et* de *erunt in ratione compoſita ex directa ratione* Bm *ad* Dd, *et ex ratione inverſa* BC *ad* DE.

Sumpta Bb ipſi Dd aequali, ordinetur bc, atque ex puncto c ducatur cI parallela ad axem AB. Quia ordinatae BC, mn infinite propinquae ſunt; utique arcus nC, qui intercipitur ab iiſdem, pro recta linea ſumi poteſt, atque ita etiam triangulum HnC pro rectilineo eſt habendum. Eſt autem hoc triangulum HnC ſimile alteri IcC; ergo HC erit ad IC, ut Hn ad Ic. Sed (392) eſt IC ad GE, ut DE ad BC; ergo ex aequo, et ex compoſitione rationis, erit HC ad GE in ratione compoſita ex ratione Hn ad Ic, et ex ratione DE ad BC. Sed ratio Hn ad Ic eſt eadem cum ratione directa Bm ad Bb, vel Bm ad Dd, et ratio DE ad BC eſt eadem cum ratione inverſa ordinatarum BC, DE; ergo etiam HC erit ad GE in ratione compoſita ex ratione directa Bm ad Dd, et ex ratione inverſa BC ad DE.

LEMMA II.

427. *Si duae quaelibet fractiones* $\frac{A}{B}$, *et* $\frac{C}{D}$ *mutuo comparentur; prima* $\frac{A}{B}$ *erit ad ſecundam* $\frac{C}{D}$ *in ratione compoſita ex directa ratione* A *ad* C, *et ex inverſa* B *ad* D.

In omni diviſione unitas eſt ad quotum, ut diviſor ad dividendum. Sed ſi dividas A per B, fractio $\frac{A}{B}$ erit quotus ex diviſione ortus; ergo 1 erit ad $\frac{A}{B}$, ut B ad A, et invertendo, $\frac{A}{B}$ erit ad 1, ut A ad B.

Digitized by Google

A ad B. Sed eandem ob cauſam eſt quoque 1 ad $\frac{C}{D}$, ut D ad C; ergo ex aequo, et ex compoſitione rationis, erit $\frac{A}{B}$ ad $\frac{C}{D}$ in ratione compoſita ex rationibus A ad B, et D ad C, ſive ut factum ex A in D ad factum ex B in C. Sed factum ex A in D eſt quoque ad factum ex B in C in ratione compoſita ex rationibus A ad C, et D ad B; ergo etiam $\frac{A}{B}$ erit ad $\frac{C}{D}$ in ratione compoſita ex rationibus A ad C, et D ad B, ſive ex directa ratione A ad C, et ex inverſa B ad D.

Corollarium.

428. Hinc ſi fractionum denominatores B et D aequentur; $\frac{A}{B}$ erit ad $\frac{C}{D}$ in directa ratione A ad C. Et ſi ex adverſo fractionum numeratores A et C ſint aequales; $\frac{A}{B}$ erit ad $\frac{C}{D}$ in inverſa ratione B ad D.

Lemma III.

429. *Si vertice* B (*Fig.* 109.), *et parametro* BI *deſcribatur circa axem* BI *parabola* BFG, *et ordinetur* IG; *haec erit abſciſſae* BI *aequalis*.

In parabola BFG quadratum ordinatae IG aequatur rectangulo ex abſciſſa BI in parametrum. Atqui parameter (ex hyp.) eſt BI; ergo quadratum ordinatae IG aequabitur rectangulo ex abſciſſa BI in BI, hoc eſt quadrato BI, conſequenter ordinata IG aequalis erit abſciſſae BI.

Lemma IV.

430. *In aſymptoto* AY *logarithmicae* ISP (*Fig.* 109.) *acceptis aequalibus, et infinite parvis ſegmentis* A*a*, C*c*, *agantur ordinatae* AI, *ak*, CD, *cd*. *Secta deinde* AI *utcunque in* B, *vertice* B, *et parametro* BI *deſcribatur circa axem* BI *parabola* BFG. *Poſtremo ductis k*K, DE, *de aſymptoto parallelis, parabolae ordinentur* IG, KH, EF, *e*L, *et agantur* H*g*, L*f parallelae ad axem* BI. *Dico, quod ſi* H*g reſolvatur in duas partes, quae ſint ut* AB *ad* BI, *etiam* F*f reſolvi poterit in duas ita, ut partes primae utriuſque ſint in inverſa ratione ordinatae* GI *ad ordinatam* FE, *et ſecundae in directa ratione ordinatae* GI *ad ordinatam* FE.

Quo-

Quoniam rectae Gg, Ff ſunt differentiae infinite parvae vicinarum ordinatarum GI et HK, FE et Le; ipſae erunt (426) in ratione compoſita ex ratione directa IK ad Ee, et inverſa GI ad FE. Sed (401) IK eſt ad Ee, vel Dz, ut AI ad CD, vel AE; ergo etiam Gg erit ad Ff in ratione compoſita ex ratione directa AI ad AE, et inverſa GI ad FE, ſive (427) ut $\frac{AI}{GI}$ ad $\frac{AE}{FE}$, aut ut ſumma $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ ad ſummam $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{BE}{FE}$. Sed cum BE ſit ad FE, ut eadem FE ad parametrum BI, erit $\frac{BE}{FE}$ aequalis $\frac{FE}{BI}$, vel (429) $\frac{FE}{GI}$; ergo Gg quoque erit ad Ff, ut ſumma $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ ad ſummam $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{FE}{GI}$. Itaque erit Gg reſoluta in duas partes, quarum prima eſt $\frac{AB}{GI}$, et ſecunda $\frac{BI}{GI}$. Similiter erit Ff reſoluta in duas partes, quarum prima eſt $\frac{AB}{FE}$, et ſecunda $\frac{FE}{GI}$. Sed pars prima $\frac{AB}{GI}$ eſt (428) ad primam $\frac{AB}{FE}$ in ratione inverſa GI ad FE, et pars ſecunda $\frac{BI}{GI}$ eſt (428) ad ſecundam $\frac{FE}{GI}$ in ratione directa BI ad FE; igitur partes primae rectarum Gg, Ff erunt in inverſa ratione ordinatae GI ad ordinatam FE, et ſecundae in ratione directa ordinatae GI ad ordinatam FE.

Corollarium I.

431. Hinc pars prima rectae Gg ad eius partem ſecundam erit, ut AB ad BI. Nam $\frac{AB}{GI}$ eſt (428) ad $\frac{BI}{GI}$, ut AB ad BI.

Corollarium II.

432. Item pars prima rectae Ff erit ad eius partem ſecundam, ut AB ad BE. Nam (430) $\frac{BE}{FE}$ aequatur $\frac{FE}{GI}$; unde pars prima $\frac{AB}{FE}$ rectae Ff erit ad ſecundam $\frac{FE}{GI}$, ut $\frac{AB}{FE}$ ad $\frac{BE}{FE}$, ſive (428) ut AB ad BE.

PROPOSITIO LXXIV.

433. *Portio AQ aſymptoti logarithmicae ISP (Fig. 109.) ſit ſpatium abſolutum a corpore, quod in fluido promovetur. Sit pariter reſiſtentia, quam ſubit corpus a prima cauſa, ad reſiſtentiam quam patitur a ſecunda in puncto A, ut AB ad BI. Denique velocitates, quas habet corpus in ſingulis ſpatii AQ punctis, velut in A, et C,*

Digitized by Google

ſint ut reſpondentes ordinatae GI, FE *parabolae* BFG. *Dico, reſiſtentiam ex prima cauſa in puncto* C *eſſe ad reſiſtentiam ex ſecunda in eodem puncto, ut* AB *ad* BE.

Reſiſtentia ex ſecunda cauſa in puncto A eſt (370) ad reſiſtentiam ex ſecunda in puncto C, ut quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in C, ſive (ex hyp.) ut quadratum ordinatae GI ad quadratum ordinatae FE, aut ut abſciſſa BI ad abſciſſam BE. Sed reſiſtentia ex ſecunda cauſa in puncto A eſt (ex hyp.) expoſita per BI; ergo et reſiſtentia ex ſecunda cauſa in puncto C erit expoſita per BE. Rurſus reſiſtentia ex prima cauſa in puncto A aequatur (376) reſiſtentiae ex eadem cauſa in puncto C. Sed reſiſtentia ex prima cauſa in puncto A eſt (ex hyp.) expoſita per AB; ergo et reſiſtentia ex prima cauſa in puncto C, exponetur hac recta AB. Itaque reſiſtentia ex prima cauſa in puncto C erit ad reſiſtentiam ex ſecunda cauſa in puncto C, ut AB ad BE.

PROPOSITIO LXXV.

434. *Iiſdem poſitis, ſi corpus temporibus infinite parvis, et inaequalibus abſolvat aequalia ſpatiola* A *a*, C *c*; *decrementum velocitatis ex prima cauſa, dum ſpatium* A *a abſolvitur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum ex ſecunda, ut* AB *ad* BI. *Similiter decrementum velocitatis ex prima cauſa, dum ſpatium* C *c percurritur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum ex ſecunda cauſa, ut* AB *ad* BE.

Quoniam reſiſtentia, quam in puncto A ſubit corpus ex prima, et ſecunda cauſa, eſt (376. 361.) per totum ſpatium A*a* conſtans, aut uniformis; utique decrementum celeritatis ex prima cauſa, dum ſpatium A*a* abſolvitur, erit ad decrementum velocitatis interea ortum ex ſecunda cauſa, ut reſiſtentia ex prima cauſa ad reſiſtentiam ex ſecunda in puncto A. Sed reſiſtentia ex prima cauſa eſt (ex hyp.) ad reſiſtentiam ex ſecunda cauſa in puncto A, ut AB ad BI; ergo et decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa dum ſpatium A*a* abſolvit, erit ad decrementum velocitatis quod interea ſubit a ſecunda cauſa, ut AB ad BI. Simili modo oſtendam, decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa, dum ſpatium C*c* abſolvit, eſſe ad decrementum velocitatis, quod interea patitur ex ſecunda cauſa, ut AB ad BE.

Corollarium I.

435. Quia $\frac{AB}{GI}$ eſt (428) ad $\frac{BI}{GI}$, ut AB ad BI; ſequitur de-

cre-

crementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa dum ſpatium A *a* abſolvit, eſſe (434) ad decrementum velocitatis, quod interim ſubit ex ſecunda cauſa, ut $\frac{AB}{GI}$ ad $\frac{BI}{GI}$.

COROLLARIUM II.

436. Similiter cum $\frac{AB}{FE}$ ſit (432) ad $\frac{FE}{GI}$, ut AB ad BE; patet, decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex prima cauſa dum ſpatium C*c* abſolvit, eſſe ad decrementum velocitatis, quod interea ſubit ex ſecunda cauſa, ut $\frac{AB}{FE}$ ad $\frac{FE}{GI}$.

PROPOSITIO LXXVI.

437. *Iiſdem poſitis, decrementa celeritatis, quae ſubit corpus a prima cauſa, dum abſolvit ſpatiola aequalia* A*a*, C*c*, *erunt in ratione inverſa ordinatae* GI *ad ordinatam* FE *parabolae* BFG; *decrementa vero celeritatis, quae interea ſubit a ſecunda cauſa, erunt in directa ratione ordinatae* GI *ad ordinatam* FE.

Quia corporis velocitates in A et C ſunt (ex hyp.) ut reſpondentes ordinatae GI, FE parabolae BFG; utique ipſae percurſis ſpatiis A*a*, C*c*, erunt (ex hyp.) ut ordinatae HK, L*e*, quae punctis *a* et *c* reſpondent, et ita G*g*, F*f* exprimet decrementa velocitatis, quae ſubit corpus a cauſis ambabus ſimul, dum abſolvit ſpatiola A*a*, C*c*. Sed G*g* eſt (430) ad F*f*, ut ſumma $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ ad ſummam $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{FE}{GI}$; igitur etiam ſumma $\frac{AB}{GI}$ et $\frac{BI}{GI}$ referet decrementum velocitatis ex cauſis ambabus ſimul, dum ſpatium A*a* abſolvitur, ſumma vero $\frac{AB}{FE}$ et $\frac{FE}{GI}$ exprimet decrementum velocitatis, dum percurritur ſpatium C*c*. Sed $\frac{AB}{GI}$ eſt (435) ad $\frac{BI}{GI}$, ut decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum percurritur ſpatium A*a*, ad decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda: ſimiliterque $\frac{AB}{FE}$ eſt (436) ad $\frac{FE}{GI}$, ut decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum percurritur ſpatium C*c*, ad decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda; ergo decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum abſolvitur ſpatium A*a*, erit

ad decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum percurritur ſpatium Cc, ut $\frac{AB}{GI}$ ad $\frac{AB}{FE}$, vel (428) ut FE ad GI. Similiter decrementum velocitatis ortum ex ſecunda cauſa, dum abſolvitur ſpatium Aa, erit ad decrementum velocitatis genitum a ſecunda cauſa, dum percurritur ſpatium Cc, ut $\frac{BI}{GI}$ ad $\frac{FE}{GI}$, vel (428) ut BI ad FE, aut (429) ut GI ad FE.

PROPOSITIO LXXVII.

438. *Corpus progrediatur in aſymptoto* AY *logarithmicae* ISP (*Fig.* 109), *et reſiſtentia ex prima cauſa ſit ad reſiſtentiam ex ſecunda in puncto* A, *ut* AB *ad* BI. *Vertice dein* B, *parametro autem* BI *fiat circa axem* BI *parabola* BFG, *cui ordinetur* GI. *Ducta poſtremo ex quovis aſymptoti puncto* C *ordinata* CD *logarithmicae* ISP, *agatur* DE, *eius aſymptoto parallela, quae occurrat axi* BI *in* E, *parabolae autem in puncto* F. *Dico, velocitatem corporis in puncto* A *eſſe ad velocitatem eiuſdem in puncto* C, *ut parabolae ordinata* GI *reſpondens puncto* A *ad eius ordinatam* FE, *quae reſpondet alteri puncto* C.

Quoniam habet corpus velocitates diverſas in A et C; idem tempuſculis inaequalibus abſolvet aequalia ſpatia Aa, Cc. Hoc poſito, ſi velocitas corporis in puncto A eſſet ad velocitatem eiuſdem in puncto C, ut parabolae ordinata GI ad aliam eius ordinatam FE; decrementa velocitatis, quae ſubiret corpus ex prima cauſa in percurrendis ſpatiolis Aa, Cc, eſſent inverſe (437) ut ordinatae GI, FE, vel (ex hyp.) inverſe ut velocitates in A et C; decrementa autem velocitatis, quae interea ſubiret ex ſecunda cauſa, eſſent (437) directe ut ordinatae GI, FE, vel (ex hyp.) directe ut velocitates in A et C. Sed quando idem corpus cum diverſis celeritatibus in eodem fluido motum, inaequalibus temporibus ſpatiola aequalia abſolvit, decrementa velocitatis, quae ex prima cauſa tempuſculis hiſce ſubit, reipſa ſunt inverſe (383) ut eius velocitates, et decrementa velocitatis, quae ſubit ex ſecunda cauſa, ſunt directe (388) ut eius velocitates; ergo velocitas eius in puncto A erit ad velocitatem in puncto C, ut parabolae ordinata GI ad aliam eius ordinatam FE.

Corollarium.

439. Et quia nulla eſt parabolae ordinata, quae reſpondeat ſpatii puncto Q; ideo ſpatium illud, in quo percurrendo amittit corpus totam velocitatem, erit AQ, vel BP.

PRO-

PROPOSITIO LXXVIII.

440. *Iiſdem poſitis, ſi ducta tangente* IO *logarithmicae* ISP, *et ſumpta* AM *dupla ipſius* AO, *iungatur* IM, *quae ordinatam ak ſecet in puncto m; decrementum velocitatis ortum ex cauſis ambabus ſimul, dum abſolvitur ſpatium* A*a*, *exponi poterit recta mi.*

Ducta GHZ, quae parabolam tanget in puncto G, et axi BI occurret in puncto Z, producatur HK, donec in *o* conveniat cum IM. Quoniam triangulum ZIG eſt ſimile alteri H*g*G, ſubtangens ZI erit ad ordinatam GI, ut H*g* ad G*g*. Sed GI eſt (ex hyp.) ipſi BI aequalis; ergo et ſubtangens ZI erit ad abſciſſam BI, ut H*g* ad G*g*. Eſt autem ſubtangens ZI dupla abſciſſae BI; ergo etiam H*g* dupla erit ipſius G*g*, hoc eſt *ki* dupla erit rectae G*g*. Rurſus cum ex vertice I trianguli AIM ducta ſit recta IO ſecans in *k* et O parallelas K*o*, AM; erit K*k* ad *ko*, ut AO ad OM. Sunt autem (ex hyp.) aequales AO, OM; ergo et aequabuntur K*k*, *ko*, ſive I*i*, *ko*. Sed ob triangulum *kmo* ſimile alteri *im*I, eſt *km* ad *mi*, ut *ko* ad I*i*; ergo cum ſint aequales *ko*, I*i*, etiam aequabuntur *km*, *mi*, ideoque *ki* erit dupla ipſius *mi*. Vidimus autem *ki* duplam eſſe etiam G*g*; igitur aequabuntur *mi*, G*g*. Sed G*g* exponit decrementum velocitatis ortum ex cauſis ambabus ſimul, dum percurritur ſpatium A*a*; igitur idem quoque repraeſentari poterit recta *mi*.

PROPOSITIO LXXIX.

441. *Iiſdem poſitis, ſi ducta* MT *ad* AI *parallela, quae conveniat cum recta* BP *in* N, *iungatur* IN, *conveniens cum logarithmicae ordinata ak in n; decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum ſpatium* A*a* *percurritur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda, ut mn ad ni.*

Cum reſiſtentia ex prima cauſa ſit (ex hyp.) ad reſiſtentiam ex ſecunda in puncto A, ut AB ad BI; etiam decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum ſpatium A*a* percurritur, erit (434) ad decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda, ut AB ad BI, aut ut MN ad NT. Sed cum ex vertice I trianguli MIT ducta ſit IN ſecans in punctis *n* et N parallelas *mi*, NT, eſt *mn* ad *ni*, ut MN ad NT; ergo etiam decrementum velocitatis ortum ex prima cauſa, dum ſpatium A*a* percurritur, erit ad decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda, ut *mn* ad *ni*.

Co-

Digitized by Google

Corollarium.

442. Igitur cum *mi* referat (440) decrementum velocitatis ortum ex cauſis ambabus ſimul, dum ſpatium A*a* percurritur; ſequitur rectam *mn* exponere decrementum velocitatis ortum a prima cauſa, et *ni* decrementum velocitatis interea genitum a ſecunda.

PROPOSITIO LXXX.

443. *Dato ſpatio* AQ, *in quo percurrendo corpus amittit totam velocitatem, dataque praeterea tum eius velocitate in initio, ſeu puncto* A, *tum etiam ratione reſiſtentiarum, quas ſubit a prima, et ſecunda cauſa eodem in puncto* A; *invenire velocitatem, quam ſuperſtitem adhuc in* Q *haberet, ſi a ſola ſecunda cauſa retardaretur.*

Recta BI, vel GI deſignet velocitatem in initio, ſeu puncto A. Sit quoque AB ad BI, ut reſiſtentia ex prima cauſa ad reſiſtentiam ex ſecunda in puncto A; eritque (442) *ni* decrementum velocitatis, quod ſubit corpus ex ſecunda cauſa, dum ſpatium A*a* abſolvit. Tandem deſcripta logarithmica IR, cuius aſymptotus ſit BN, et quae tranſeat per I et *n*, producatur QP in R, ut ita prodeat eius ordinata PR. His poſitis, dico hanc ordinatam repraeſentare quaeſitam velocitatem, quae convenit puncto Q. Si enim corpus, quod in A (ex hyp.) habet velocitatem expoſitam recta BI, vel *bi*, a ſola ſecunda cauſa retardaretur; idem dum abſolveret ſpatium A*a*, amitteret (442) velocitatem *ni*, et ideo in puncto *a* haberet velocitatem expoſitam recta *bn*. Cum ergo velocitates in A et *a* eſſent expoſitae ab ordinatis BI, *bn* logarithmicae I*n*R, etiam velocitas conveniens puncto Q, exponeretur (410) ab ordinata reſpondente PR.

PROPOSITIO LXXXI.

444. *Data velocitate in initio, ſeu puncto* A (*Fig.* 109.), *qua ſi corpus per fluidum moveatur, ex ſecunda cauſa patitur reſiſtentiam ponderi eius aequalem, dataque praeterea ſpatio* AQ, *in quo percurrendo eam amittit dum retardatur a cauſis ambabus ſimul; invenire rationem, quae intercedit inter velocitatem corporis in initio, ſeu puncto* A, *et velocitatem ſuperſtitem, quam idem corpus haberet in puncto* Q, *ſi a ſola ſecunda cauſa retardaretur.*

Ordinata BI logarithmicae I*n*R exponat velocitatem, quam habet corpus in initio, ſeu puncto A; ordinata autem alia PR exprimat velocitatem, quam ſuperſtitem haberet in puncto Q, ſi ex ſo-

ſola ſecunda cauſa retardaretur, et quaeratur proportio inter BI, et PR. Per notas menſuras quaere (366) altitudinem AO, ex qua corpus in vacuo cadendo, acquirit velocitatem BI. Quoniam haec altitudo AO eſt quoque (418) dimidia ſubtangentis logarithmicae I*n*R; utique ipſa duobus numeris exponetur (421), quorum alter eſt abſolutus, alter autem depromptus ex numeris tabularum, unde altitudo AO erit ad ſpatium AQ, ut eadem altitudo AO tabularum numeris deſignata, ad ſpatium AQ itidem expreſſum numeris tabularum. Sed primi tres termini (405) dati ſunt; igitur dabitur etiam quartus, ſeu recta AQ, vel BP expreſſa numeris tabularum. Atqui BP tabularum numeris deſignata, eſt (399) logarithmus rationis BI ad PR; igitur etiam dabitur logarithmus huius rationis, et ideo illi numeri abſoluti, quorum logarithmorum differentia eſt aequalis invento logarithmo huius rationis, inter ſe erunt (400) ut BI ad PR, ſive ut velocitas corporis in initio, ſeu puncto A ad velocitatem ſuperſtitem, quam haberet in puncto Q, ſi a ſola ſecunda cauſa retardaretur.

LEMMA.

445. *Subtangens logarithmicae* I*n*R (*Fig.* 109.) *eſt duplo maior ſubtangente* AO *alterius logarithmicae* ISP.

Quoniam ordinatae BI, *bn* logarithmicae I*n*R infinite proximae ſupponuntur; utique eius arcus I*n* erit infinite parvus, ac proinde cenſeri poterit velut recta ducta ex I ad *n*. Sed recta IN tranſit (441) per I et *n*, ideoque coincidit cum recta I*n*; ergo etiam coincidet cum infinite parvo arcu I*n* logarithmicae I*n*R, ac proinde haec tangetur a recta IN in I, habebitque pro ſubtangente rectam BN. Eſt autem BN ipſi AM aequalis; ergo ſubtangens logarithmicae I*n*R aequabitur rectae AM. Sed eſt AM (440) dupla ipſius AO; ergo et ſubtangens logarithmicae I*n*R duplo maior erit ſubtangente AO alterius logarithmicae ISP.

PROPOSITIO LXXXII.

446. *Si* BI *ſit velocitas corporis in initio, ſeu puncto* A, *et* PR *velocitas, quam ſi corpus retardaretur a ſola ſecunda cauſa, ſuperſtitem haberet in puncto* Q, *in quo totam amittit velocitatem dum retardatur a cauſis ambabus ſimul; differentia quadratorum* BI *et* PR *erit ad quadratum* PR, *ut* BI *ad* AB.

Recta AQ ipſi BP aequalis, biſecetur in puncto V, et agatur VS ad rectam AQ normalis. Subtangens BN logarithmicae I*n*R

eſt

Digitized by Google

eſt (445) ad ſubtangentem AO logarithmicae ISP, ut 2 ad 1, ſive ut AQ ad AV, vel ut BP ad AV. Sed BP eſt (399) ad AV, ut logarithmus rationis BI ad PR ad logarithmum rationis AI ad VS; ergo et ſubtangens BN logarithmicae I*n*R erit ad ſubtangentem AO logarithmicae ISP, ut logarithmus rationis BI ad PR ad logarithmum rationis AI ad VS. Atqui in variis logarithmicis ſunt (406) ſubtangentes, ut logarithmi aequalium rationum; igitur ratio BI ad PR aequabitur rationi AI ad VS, hoc eſt BI erit ad PR, ut AI ad VS, et quadratum BI erit ad quadratum PR, ut quadratum AI ad quadratum VS. Sed ob aequalia ſegmenta axis AV, VQ, eſt (396) AI ad VS, ut VS ad QP, et quadratum AI ad quadratum VS, ut AI ad QP, vel ut AI ad AB; ergo et quadratum BI erit ad quadratum PR, ut AI ad AB, et dividendo, differentia quadratorum BI et PR erit ad quadratum PR, ut BI ad AB.

Corollarium.

447. Quia reſiſtentia ex ſecunda cauſa eſt (433) ad reſiſtentiam ex prima cauſa in puncto A, ut BI ad AB; etiam differentia quadratorum BI, PR erit (446) ad quadratum PR, ut reſiſtentia ex ſecunda cauſa ad reſiſtentiam ex prima in puncto A.

PROPOSITIO LXXXIII.

448. *Data velocitate in initio, ſeu puncto* A, *qua ſi corpus per fluidum moveatur, ex ſecunda cauſa patitur reſiſtentiam ponderi eius aequalem, datoque praeterea ſpatio* AQ, *in quo percurrendo illam amittit dum retardatur a cauſis ambabus ſimul; invenire rationem, quae intercedit inter reſiſtentiam ex ſecunda cauſa ad reſiſtentiam ex prima in puncto* A.

Sit BI velocitas, quam habet corpus in initio, ſeu puncto A. Tum ex hac data, et dato etiam ſpatio AQ, quaeratur (444) ratio velocitatis BI ad velocitatem PR, quam ſuperſtitem haberet in puncto Q, ſi a ſola ſecunda cauſa retardaretur. Cum ergo nota, ſeu data ſit ratio BI ad PR, dabitur etiam ratio quadrati BI ad quadratum PR, atque adeo etiam dabitur ratio differentiae quadratorum BI, PR ad quadratum PR. Atqui haec ratio eſt (447) aequalis rationi, quam habet reſiſtentia ex ſecunda cauſa ad reſiſtentiam ex prima in puncto A; igitur etiam data erit ratio reſiſtentiae ex ſecunda cauſa ad reſiſtentiam ex prima in puncto A.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO LXXXIV.

449. *Data velocitate* BI *in initio, ſeu puncto* A, *qua ſi corpus per fluidum moveatur, patitur ex ſecunda cauſa reſiſtentiam ponderi eius aequalem, et dato praeterea ſpatio* AQ, *in quo percurrendo illam amittit dum retardatur à cauſis ambabus ſimul; invenire velocitatem, quam habet in quovis alio puncto* C *eiuſdem ſpatii* AQ.

Ex datis velocitate BI, et ſpatio AQ, quaere (444) in logarithmorum tabulis illum numerum, qui referat logarithmum rationis BI ad PR, quique etiam exprimet (408) logarithmum rationis AI ad VS, priori (446) aequalis, ſeu (399) rectam AV, ſi ponas ISP eſſe logarithmicam tabularum. Tum duplica hanc rectam AV tabularibus numeris indicatam, ut in eiſdem numeris tabularum habeas etiam AQ, quae duplo maior eſt (446) quam AV. Fiat deinde, ut ſpatium AQ in quo percurrendo amittit corpus totam velocitatem, ad ſpatium datum AC, ita AQ expreſſa numeris tabularum ad quartum terminum proportionalem, qui erit AC tabularibus numeris indicata, ſeu (399) logarithmus rationis AI ad CD. Ponatur tandem abſciſſarum origo in puncto Y, et ſumpto ad libitum numero, qui deſignet AI, ex eius logarithmo YA auferatur inventus logarithmus rationis AI ad CD, et habebitur (399) logarithmus YC numeri, qui deſignat CD, aut AE. Rurſus a logarithmo YA numeri, qui deſignat AI, ſubtrahatur AQ expreſſa numeris tabularum, ſeu logarithmus rationis AI ad QP, et prodibit logarithmus YQ numeri, qui deſignat QP, aut AB. Dantur ergo tres numeri, qui ſunt inter ſe, ut AI, AE, AB; propterea ſi ex primis duobus tertius auferatur, ſupererunt duo numeri, qui inter ſe erunt, ut BI ad BE, vel ut quadratum ordinatae GI parabolae BFG ad quadratum ordinatae FE, aut (438) ut quadratum velocitatis in puncto A ad quadratum velocitatis in puncto C. Sed cum data ſit velocitas corporis in puncto A, eius quadratum pariter datum erit; ergo et per regulam auream invenietur quadratum velocitatis in puncto C. Sed dato quadrato, datur ſimiliter eius radix; ergo etiam invenietur quaeſita velocitas, quam habet corpus in puncto C.

Digitized by Google

CAPUT X.

De aquae iactibus, aut venis, quae effluentes per foramen, aut lumen tubi, in altum proſiliunt, aut horizontaliter promoventur.

DEFINITIO VII.

450. Fluidum, quod proſilit e vaſe per lumen tubi, aut foramen inſculptum in vaſis latere, *iactus* dicitur.

PROPOSITIO LXXXV.

451. *Aqua, quae ſub conſtanti altitudine* AH (Fig. 111.) *continetur in vaſe* EAIM, *ex hoc proſiliat per foramen, aut lumen* A *valde parvum relate ad amplitudinem vaſis, et quidem iuxta directionem horizontalem* AG. *Deinde* EA *indefinite producta ad* F, *vertice* A, *et parametro quae ſit quadrupla altitudinis aquae* AH, *fiat circa axem* AF *parabola* APL. *Dico, iactum aquae fluentis per foramen, aut lumen* A, *hanc motu ſuo parabolam deſcripturum.*

Sumpta abſciſſa AO, quae ſit aequalis altitudini aquae AH, et ducta ordinata OP, compleatur rectangulum AOPQ. Quia parameter parabolae APL eſt (ex conſtr.) quadrupla rectae AH; quadratum ordinatae OP aequabitur rectangulo ex abſciſſa AO in quadruplum rectae AH, ſive quadruplum erit rectanguli OAH, ſive quadrati AO, et ideo ordinata OP, vel AQ erit dupla abſciſſae AO, vel AH. Iam ſi aqua erumpens per foramen, aut lumen A, non eſſet gravis, eadem motu aequabili progrederetur in recta AG cum illa velocitate, quam acquirere (227) poteſt grave in vacuo cadendo ex H in A, et tempore huius lapſus abſolveret ſpatium duplum altitudinis aquae AH. Eſt autem AQ (ex demonſtr.) dupla ipſius AH; ergo aqua motu aequabili progrederetur ex A ad Q tempore illo, quo grave in vacuo cadendo, motu uniformiter accelerato deſcenderet ex HA. Sed aqua erumpens per foramen, aut lumen A, utpote a proprio pondere animata, motu uniformiter accelerato deſcendit ex A in O tempore illo, quo grave in vacuo cadendo deſcenderet ex HA; ergo aqua tempore illo, quo aequabili motu abiret ex A in Q, motu uniformiter accelerato deſcendet ex A in O, ſive ex Q in P, ideoque tempore hoc elapſo, reperietur in puncto P. Rurſus ſi ſumpta quaecunque alia abſciſſa AB, et ducta ordinata reſpondenti BS, compleatur rectangulum ABSR;

aqua

Digitized by Google

aqua tempore illo, quo aequabili motu lata, ferretur ex A in R, motu uniformiter accelerato deſcenderet ex R in S. Nam tempus quo aqua aequabiliter ferretur ex A ad Q, eſt ad illud quo promoveretur ex A ad R, ut AQ ad AR, aut ut OP ad BS, et quadratum temporis quo aqua aequabiliter ferretur ex A ad Q, erit ad quadratum temporis quo promoveretur ex A ad R, ut quadratum OP ad quadratum BS, ſive ut AO ad AB, aut ut QP ad RS, vel ut quadratum temporis, quo eadem aqua motu uniformiter accelerato deſcenderet ex altitudine QP, ad quadratum temporis quo caderet ex altitudine RS. Sed quando quatuor quadrata ſunt proportionalia, etiam illorum radices ſunt proportionales; ergo etiam tempus quo aqua aequabili motu ferretur ex A in Q, erit ad illud quo promoveretur ex A in R, ut tempus quo motu uniformiter accelerato caderet ex Q in P, ad tempus quo deſcenderet ex R in S. Sed tempus quo aqua aequabili motu ferretur ex A in Q, aequatur (ex demonſtr.) tempori quo motu uniformiter accelerato deſcenderet ex Q in P; ergo etiam tempus quo aequabiliter promoveretur ex A in R, aequabitur tempori quo motu uniformiter accelerato caderet ex R in S, et ideo tempore hoc elapſo, reperietur aqua in puncto S. Simili modo oſtendam, eundem iactum etiam tranſire per reliqua alia puncta parabolae APL; igitur idem iactus motu ſuo parabolam hanc deſcribet.

PROPOSITIO LXXXVI.

452. *Aqua, quae ſub altitudine conſtanti* BC (*Fig.* 112.) *continetur in vaſe* BCDF, *ex illo erumpat per lumen* C *ſecundum directionem* CN *inclinatam ad horizontem. Tum ſuper diametrum* BC *deſcripto ſemicirculo* CRB, *et ducta* RE *ad* BC *normali, eadem producatur uſque ad* H, *donec nimirum fiat* RH *ipſi* RE *aequalis. Dico, quod aquae iactus tranſibit per punctum* H.

Ducta horizontali CL, et ad eam normali HS, quae producta occurrat directioni iactus CN in G, circa hanc veluti axem deſcribatur per C parabola CHP. Deinde verticalibus rectis HS, BC indefinite productis in O et K, agatur HI ad CN parallela. Cum ob parallelas GH, EC, triangulum GHR ſit ſimile REC; utique ut HR ad RE, ita erit GR ad RC, et GH ad EC. Sunt autem (ex conſtr.) aequales HR, RE; ergo et aequabuntur tam rectae GR, RC, quam rectae GH, EC. Eſt vero EC aequalis ipſi HS; igitur aequabuntur etiam GH, HS, et ideo recta CN parabolam CHP tanget in puncto C, et huic parallela HI erit ordinata eiuſdem parabolae relatae ad diametrum CK. Rurſus ob parallelas RC, HI, eſt EC ad CI, ut ER ad RH. Sunt au-

Digitized by Google

tem aequales E R, R H; ergo et aequabuntur E C, C I. Iam cum aqua motu aequabili progrediatur in recta C N cum illa velocitate, quam (227) acquirere poteſt grave in vacuo cadendo ex B in C, ſpatia quae in recta C N abſolvit, erunt ut tempora, quibus illa percurrit, et ideo ſpatium quod aqua abſolvit in recta C N tempore quo grave caderet ex B in C, erit ad ſpatium quod in eadem recta percurrit tempore, quo deſcenderet ex E in C, ut tempus lapſus per B C ad tempus lapſus per E C. Sed tempus lapſus per B C eſt (a) ad tempus lapſus per E C, ut diameter B C ad chordam C R, vel ut duplum diametri B C ad duplum chordae C R; ergo et ſpatium quod aqua in recta C N abſolvit tempore, quo grave caderet ex B in C, erit ad ſpatium quod percurrit tempore quo idem grave deſcenderet ex E in C, ut duplum diametri B C ad duplum chordae C R. Sed ſpatium quod aqua abſolvit in recta C N tempore, quo grave caderet ex B in C, eſt (b) duplum diametri B C; ergo et ſpatium quod percurrit tempore, quo caderet ex E in C, erit duplum chordae C R, ſeu erit C G. Sed quia aequantur E C, C I, aqua a proprio pondere animata, cadit ex C in I tempore illo, quo grave deſcenderet ex E in C; igitur aqua ſpatium C G abſolvit tempore illo, quo cadit ex C in I, ſive ex G in H, et ideo poſt hoc tempus reperietur in puncto H. Itaque iactus aquae tranſibit per punctum H.

Corollarium I.

453. Quoniam recta H E ducta ex vertice H parabolae CHP, ita diametro eius C K occurrit, ut ſit C E abſciſſae C I aequalis; ipſa parabolam etiam tanget in puncto H.

Corollarium II.

454. Hinc parameter parabolae C H P relatae ad axem H O, erit quadrupla rectae B E. Quippe cum ſit H E dupla R E; quadratum H E, vel ordinatae S C erit quadruplum quadrati R E, aut rectanguli C E B, ſive rectanguli ex abſciſſa H S in E B. Sed quadratum ordinatae S C eſt etiam aequale rectangulo ex abſciſſa H S in parametrum parabolae ad axem H O relatae; ergo et rectangulum ex abſciſſa H S in hanc parametrum erit quadruplum rectanguli ex eadem abſciſſa HS in EB, ideoque parameter parabolae CHP ad axem A O relatae, erit quadrupla rectae B E.

Corollarium III.

455. At parameter eiuſdem parabolae C H P relatae ad diametrum eius C K, erit quadrupla altitudinis aquae C B. Cum enim

(a) Per noſtram Mechanicam Coroll. I. Prop. XXV. §. 139. pag. 50.
(b) Per noſtram Mechanicam Prop. 19. §. 122. pag. 42.

Digitized by Google

nim HI ſit ad RC, ut IE ad EC, ſitque IE dupla EC; erit quoque HI dupla RC, et quadratum ordinatae HI quadruplum quadrati RC, ſive rectanguli ECB, aut rectanguli ICB. Eſt autem quadratum ordinatae HI aequale etiam ractangulo ex abſciſſa CI in parametrum parabolae ad diametrum CK relatae; ergo etiam rectangulum ex abſciſſa CI in hanc parametrum erit quadruplum rectanguli ex eadem abſciſſa CI in CB, et idcirco parameter parabolae CHP ad diametrum CK relatae, erit quadrupla rectae CB.

PROPOSITIO LXXXVII.

456. *Iiſdem poſitis quae in theoremate praecedenti, iactus aquae effluentis per lumen* C, *motu ſuo deſcribet parabolam* CHP.

In diametro CK accipiatur quaevis abſciſſa CM, et ducta ordinata ML, compleatur parallelogrammum CMLQ. Cum aqua aequabili motu abſolvat ſpatia CG, CQ; utique tempus quo percurrit ſpatium CG, erit ad tempus quo abſolvit ſpatium CQ, ut ſpatium CG ad ſpatium CQ, et quadratum temporis quo abſolvit ſpatium CG, erit ad quadratum temporis quo percurrit ſpatium CQ, ut quadratum ſpatii CG ad quadratum ſpatii CQ, vel ut quadratum ordinatae IH ad quadratum ordinatae ML, vel ut abſciſſa CI ad abſciſſam CM, aut ut GH ad QL. Sed etiam quadratum temporis quo aqua in vacuo cadit ex G in H, eſt ad quadratum temporis quo deſcendit ex Q in L, ut GH ad QL; ergo et quadratum temporis quo aqua abſolvit ſpatium CG, erit ad quadratum temporis quo percurrit ſpatium CQ, ut quadratum temporis quo cadit ex G in H, ad quadratum temporis quo deſcendit ex Q in L, et tempus quo aqua fertur ex C in G, erit ad tempus quo promovetur ex C in Q, ut tempus quo cadit ex G in H, ad tempus quo deſcendit ex Q in L. Sed tempus quo fertur aqua ex C in G, aequatur (452) tempori quo cadit ex G in H; igitur etiam tempus, quo promovetur ex C in Q, aequabitur tempori quo deſcendit ex Q in L, et ideo poſt hoc tempus reperietur in puncto L. Pari modo conſtabit, iactum aquae etiam tranſire per reliqua alia puncta parabolae CHP; igitur iactus aquae motu ſuo parabolam hanc deſcribet.

COROLLARIUM I.

457. Unde quo maior erit angulus NCL comprehenſus a directione iactus CN, et a recta horizontali CL, eo altior etiam erit iactus parabolicus CHP. Nam quo maior eſt angulus NCL, eo maior eſt quoque arcus CR, cuius medietas eſt menſura anguli NCL. Sed quo maior eſt arcus CR, eo maior fit quoque EC,

vel

Digitized by Google

vel H S, quae eſt altitudo iactus parabolici C H P; ergo quo maior erit angulus N C L, eo altior erit iactus parabolicus C H P.

Corollarium II.

458. Et ideo ſi directio C N iactus aquae effluentis per lumen C ſit perpendicularis ad horizontem, ſive ad rectam C L, hoc eſt ſi rectus ſit angulus N C L; aſcendet iactus ad altitudinem aequalem illi, quam habet aqua contenta in vaſe B C D F. Altitudo enim H S iactus C H P ſemper aequalis eſt rectae E C. Sed dum rectus ſit angulus N C L, arcus C R evadit dimidia circumferentia C R B, et ideo recta E C fit ipſi B C aequalis; ergo et altitudo iactus H S fiet aequalis altitudini B C aquae contentae in vaſe B C D F.

Scholion I.

459. In praxi tamen iactus perpendicularis ad horizontem, nunquam aſſurgit ad altitudinem parem illi, quam habet aqua contenta in vaſe, ex quo erumpit, ſed ad minorem ob varias cauſas. Prima eſt reſiſtentia frictionis, quam ſubeunt aquae particulae latera luminis attingentes. Et quamvis aliae particulae prope centrum luminis tranſeuntes, hanc reſiſtentiam non patiantur; nihilominus tamen cum aliquantulum adhaereſcant aliis particulis lateralibus, utique eas abripiendo et celeritatem ipſis communicando, coguntur motum proprium retardare. Secunda cauſa eſt gravitas particularum, ex quibus componitur idem iactus. Poſtquam enim aqua in altum expulſa, aſcendit quantum potuit, tunc amiſſa omni velocitate, paullulum haeret in ſuperiori columnae parte, indeque rurſus urgente vi gravitatis deorſum labitur, impeditque quominus aquae particulae aſſurgentes, ad illam perveniant altitudinem, ſub qua manet aqua contenta in vaſe. Tertia cauſa eſt reſiſtentia aeris, quam attollere, et findere debet iactus. Cum enim proſiliens aqua agat in particulas aeris, in quas incurrit, viciſſim hae quoque reagendo in aquam retardant eiuſdem motum. Haec autem aeris reſiſtentia eſt eo maior, quo celerior iactus eſt; quippe (384) reſiſtunt fluida in ratione duplicata velocitatis, qua corpora in iis moventur, adeo ut in celerrimo aquae aſcenſu ab aere vehementer reſiſtenti iactus aquae in guttas minimas diſcerpatur. Prima cauſa retardationis nullo modo corrigi poteſt. Secunda tolli, aut minui ſaltem poteſt efficiendo, ut directio aquae proſilientis non ſit perpendicularis, ſed paullulum inclinata ad horizontem; tunc enim relabens aqua, non incumbit amplius aſſurgenti. Et ſane experientia edocuit Torricellium (a), et Boſſutium (b), quod fluidum, directione paullulum inclinata ad horizontem, altius quam verticaliter elevatur.

Scho-

(a) Lib. 2. De motu proiectorum pag. 192.
(b) Traité Elementaire d'Hydrodynamique Tom. 1. art. 455. pag. 97.

Digitized by Google

Scholion II.

460. Circa primam cauſam retardationis accurate eſt obſervandum, eo maiorem, ſervata proportione, frictionem dari, quo minus eſt lumen, per quod effluit aqua. Luminis enim circumferentia, in qua frictio datur, creſcit ut diameter, et ipſum lumen augetur ut quadratum diametri; unde augetur magis fluidi proſilientis quantitas, quam frictio. Ex hoc autem fieri debet, ut ſi duo iactus aquae cum aequalibus velocitatibus, ſed ex luminibus inaequalibus egrediantur; ille, cuius craſſities maior eſt, altius prae altero attollatur.

Scholion III.

461. Excellunt in hac doctrina de fontium iactibus Mariottus (a), et Deſagulierius (b), qui innixi experimentis edocuerunt, qua methodo, ac ratione conſtruendi ſint tubi vehentes aquam alendis fontibus neceſſariam, qualesque praeterea eſſe debeant amplitudines tam tuborum vehentium aquam, quam luminum, per quae eadem aqua effluit, ut inde ad maximam, quam poteſt, aſcendat altitudinem.

CAPUT XI.

De libero curſu Fluminum.

DEFINITIO VIII.

462. *Alveus fluminis* eſt cavitas in ſuperficie telluris facta, intra quam continuo aqua currit.

DEFINITIO IX.

463. *Alveus naturalis* eſt, qui a natura effectus eſt; *Alveus* autem *artificialis* vocatur ille, qui arte effectus eſt.

Scholion.

464. Alveus naturalis irregularem figuram habet, alveus autem artificialis figuram habet parallelepipedi recti N A F E D C B P (Fig. 13); cuius baſis PBCD refert fluminis fundum ſive horizontalem, ſive inclinatum ad horizontem; oppoſita autem latera NPDE, ABCF, parallela, et perpendicularia ad horizontem, *Ripas fluminis* repraeſentant.

DE-

(a) Traité de mouvement des Eaux part. IV. diſcours. 1.
(b) Cours de Phyſique Experimentel Tom. 2. pag. 130.

Digitized by Google

DEFINITIO X.

465. Si flumen ſecetur plano perpendiculari ad eius fundum, communis ſectio inde orta, *ſectio fluminis* appellatur.

Scholion.

466. Ponamus aquam in alveo progredientem ex improviſo in glaciem verti, et ſubinde ſecari plano perpendiculari ad eius fundum; ſectio inde genita, erit illa, quam ſectionem fluminis appellamus.

Corollarium.

467. Hinc ſectio fluminis naturalis erit (464) figura irregularis; ſectio autem fluminis artificialis, veluti N A F E D C B P (Fig. 113.) erit rectangulum G I O H, cuius baſis H O eſt fluminis latitudo, et cuius altitudo H G eſt eadem cum altitudine eiuſdem fluminis.

Scholion.

468. Quando in poſterum ſermo erit de altitudine fluminis, aut ſectionis, per illam intelligetur ea perpendiculi a ſuperficie aquae in fundum demiſſi pars, per quam continuo tranſit aqua, ita ut ſi in ſuperiore alvei eiuſdem tractu ceſſaret ſubito omnis fluxus, nihil prorſus aquae in ea amplius remaneret. Aqua enim in cavitatibus fundi ſtagnans, nihil ad flumen confert, cum perinde ſit ac ſi abeſſet, fundo exiſtente plano. Et quoniam aqua currens ad differentiam ſtagnantis dicitur *viva*, ideo per altitudinem fluminis, aut ſectionis ſolum intelligemus altitudinem vivam aquae.

DEFINITIO XI.

469. Si altitudo A Q ſectionis S R Q A (Fig. 114.) diviſa concipiatur in aequas partes multitudine infinitas, et magnitudine infinite parvas, atque ex punctis ſingulis diviſionum agantur rectae A G, B H, D I, E L, &c., ipſi A Q normales, quae ſingulae repraeſentent velocitates aquae fluentis per reſpondentia altitudinis puncta A, B, D, E, &c., curva G H K N, ad quam terminantur hae rectae omnes, dicetur *ſcala velocitatum*, et eius area, ſeu ſpatium A G N Q vocabitur *complexus velocitatum* aquae fluentis per altitudinem A Q ſectionis.

Co-

Corollarium I.

470. Hinc ſi A G ſit ſpatium minuti ſecundi tempore abſolutum a particula fluente per punctum A; B H pariter erit ſpatium percurſum eodem tempore a particula tranſeunte per punctum B. Cum enim particulae fluentes per A, et B, motu aequabili progrediantur; ſpatia ab illis minuti ſecundi tempore abſoluta, erunt ut earum velocitates, hoc eſt (469) ut rectae A G, B H. Sed ſpatium a particula fluente per punctum A minuti ſecundi tempore abſolutum, aequale eſt (ex hyp.) rectae A G; ergo et ſpatium pari tempore abſolutum a particula fluente per punctum B, aequabitur rectae B H.

Corollarium II.

471. Quia ſimili modo patet, ſpatia minuti ſecundi tempore abſoluta a particulis effluentibus per altitudinis puncta reliqua D, E, F, C, &c., aequalia eſſe rectis D I, E L, F M, C K, &c.; ſequitur, quantitatem aquae intra minutum ſecundum per altitudinem A Q fluentis, aequari ſpatio A G N Q, quod proinde etiam vocabitur *complexus ſpatiorum*.

Definitio XII.

472. *Velocitas media* aquae fluentis per altitudinem, aut perpendiculum A Q ſectionis, eſt illa, quam ſi haberent particulae omnes aquae, quae ſimul tranſeunt per A Q, tanta aquae copia per hanc tempore dato flueret, quanta reipſa fluit velocitatibus variis mota.

Corollarium I.

473. Hinc ſi altitudini A Q applicari intelligatur rectangulum A O P Q aequale ſpatio A G N Q; eius latitudo A O, vel C K erit (472) velocitas media aquae fluentis per altitudinem A Q. Nam ſi particulae omnes aquae, quae ſimul tranſeunt per A Q, communem haberent velocitatem C K; quantitas aquae minuto ſecundo effluens per A Q, aequaretur rectangulo A O P Q. Sed quantitas aquae minuto ſecundo variis celeritatibus effluens per A Q, aequatur (471) ſpatio A G N Q, ergo cum rectangulum A O P Q aequale ſit (ex hyp.) ſpatio A G N Q; tanta aquae copia minuto ſecundo efflueret per A Q cum velocitate communi C K, quanta per eam tempore eodem fluit velocitatibus variis mota, ideoque C K erit (472) velocitas media aquae fluentis per altitudinem A Q.

Corollarium II.

474. Cum ſimili modo conſtet, mediam quoque velocitatem aquae fluentis per aliam qualemcumque altitudinem T V eiuſdem ſe-

ctionis S R Q A, eſſe priori C K aequalem; utique eadem C K erit velocitas etiam media aquae fluentis per integram ſectionem SRQA.

Corollarium III.

475. Et ideo quantitas aquae minuto ſecundo effluens per ſectionem S R Q A, aequabitur recto priſmati, cuius baſis eſt ſectio S R Q A, et cuius altitudo eſt velocitas media C K.

Corollarium IV.

476. Hinc ſi quantitas aquae intra minutum ſecundum effluens per ſectionem S R Q A, conformaretur in priſma rectum, habens baſim eidem ſectioni aequalem; eius altitudo aequalis eſſet mediae velocitati aquae fluentis per hanc ſectionem.

DEFINITIO XIII.

477. Flumen dicitur eſſe *in ſtatu manenti*, ſi eius ſuperficies nullibi attollatur, aut deprimatur, hoc eſt ſi ipſum eodem in loco eandem ſemper habeat altitudinem.

DEFINITIO XIV.

478. *Filum fluminis* vocamus lineam, quae in ſingulis ſectionibus tranſit per punctum, in quo velocitas aquae eſt maxima.

PROPOSITIO LXXXVIII.

479. *Si flumen in ſtatu manenti ſit, aequales quantitates aquae tempore dato fluent per eius ſectiones quomodolibet inaequales.*

Flumen HMQKEDPB (Fig. 115.) in ſtatu manenti ſit, et rectangula H P, K D ſint duae eius ſectiones invicem inaequales. Dico, per illas tempore dato fluere quantitates aequales aquae. Nam ſi minus aquae tempore dato flueret per ſectionem inferiorem K D, quam per ſuperiorem H P; quantitas aquae poſitae inter ſectiones K D, H P, continuo maior fieret, et ſic fluminis ſuperficies H M Q K attolleretur, atque adeo idem flumen non amplius (477) in ſtatu manenti eſſet, contra hypotheſim. Si vero plus aquae tempore dato flueret per ſectionem K D, quam per ſectionem H P; utique hoc in caſu inter ſectiones K D, H P quantitas aquae continuo minor fieret, et ſic fluminis ſuperficies H M Q K perpetuo deprimeretur, ac propterea idem flumen non amplius (477) in ſtatu manenti foret, contra hypotheſim. Cum ergo nec minus, nec plus aquae tempore dato fluat per ſectionem inferiorem K D, quam per ſuperiorem H P; con-

Digitized by Google

conſequens eſt, ut quantitates aequales aquae tempore dato tranſeant per utramque.

Corollarium.

480. Si ergo fundus B P D E ubivis fuerit aeque latus, velut contingit (464) in alveo artificiali; tunc per ſectionem altitudines inaequales H B, K E tempore dato fluent quantitates aequales aquae.

PROPOSITIO LXXXIX.

481. *Iiſdem poſitis, velocitates mediae aquae fluentis per inaequales ſectiones* H P, K D (*Fig.* 115.) *ſunt inverſe ut hae ſectiones.*

Quantitates aquae minuti ſecundi tempore effluentes per ſectiones H P, K D conformari intelligantur in duo priſmata C L, N R (Fig. 116. 117.), quorum baſes A C F T, X N Z Y aequentur ſectionibus H P, K D. Hoc autem poſito, priſmatum altitudines T L, Y R exponent (476) medias velocitates aquae fluentis per has ſectiones. Cum itaque per ſectiones H P, K D tempore dato fluant (479) quantitates aequales aquae; duo priſmata C L, N R erunt aequalia inter ſe. Sed priſmata aequalia reciprocant baſes, et altitudines; ergo T L erit ad Y R, ut X N Z Y ad A C F T. Sed T L eſt ad Y R, ut velocitas media aquae fluentis per ſectionem H P ad velocitatem mediam aquae fluentis per ſectionem K D, et X N Z Y eſt ad A C F T, ut ſectio K D ad ſectionem H P; ergo etiam velocitas media aquae fluentis per ſectionem H P erit ad mediam velocitatem aquae fluentis per ſectionem K D, ut haec ſectio K D ad ſectionem H P.

Corollarium I.

482. Quare ſi fluminis fundus B P D E (Fig. 115.) ubivis fuerit aeque latus; velocitas media aquae fluentis per ſectionem H P, erit quoque ad velocitatem mediam aquae fluentis per ſectionem K D, ut huius altitudo K E ad illius altitudinem H B.

Corollarium II.

483. Hinc per minorem ſectionem K D aqua tranſire debet maiori celeritate, quam per maiorem H P. Nam velocitas media aquae fluentis per ſectionem K D, eſt ad velocitatem mediam eiuſdem, cum tranſit per ſectionem H P (481), ut ſectio H P ad ſectionem K D. Sed ſectio H P eſt maior ſectione K D; ergo et velocitas media aquae fluentis per ſectionem K D, erit maior media velocitate, qua eadem aqua fluit per ſectionem H P.

Digitized by Google

Corollarium III.

484. Quare dum fluminis aqua tranſit a latiori ſectione ad ſequientem aliam anguſtiorem, ipſa vel rodere debet fundum, ut ita minor fluminis latitudo maiori altitudine compenſetur, vel ſi rodere fundum nequeat, velocitatem maiorem acquiret. Et viceverſa, dum fluminis aqua tranſit ab arctiori ſectione in latiorem, eadem vel deponendo particulas terreas in eius fundo, hunc elevabit, ut ita maior fluminis latitudo minori altitudine compenſetur, vel ſi nequeat hoc praeſtare, minorem habebit velocitatem.

Scholion.

485. Quae continentur tribus his corollariis, ſunt conſona experimentis. Quippe videmus aquam ibi celerius promoveri, et magis profundam eſſe, ubi minor eſt fluminis latitudo; ibi autem tardius progredi, et minus profundam eſſe, ubi maior eſt latitudo. Uſu quoque in praxi receptum fuit, ut ad aquae motum accelerandum, alveus fluminis coarctetur.

Propositio XC.

486. *Si ex lacu inexhauſto erumpat flumen ubivis aeque latum, habenſque fundum horizonti quomodolibet inclinatum; aqua proxima eius fundo eo velocior erit, quo magis a fluminis ortu diſtabit.*

Per emiſſarium CD inexhauſti lacus ARDB (Fig. 118.) erumpat flumen CDPQ ubivis aeque latum, cuius ſuperficies ſuprema ſit linea CFQ, fundus autem linea DGP inclinata ad horizontem. Deinde idem fundus DGP eouſque produci intelligatur, donec conveniat cum horizontali ſuperficie lacus, ex. gr. in puncto A; eritque hoc punctum A origo fluminis CDPQ. Demum in fundo acceptis duobus punctis quibuslibet G, et I, in illis fiant ſectiones duae, quarum altitudines vivae ſint rectae GF, IK perpendiculares ad eius fundum. Dico, aquam in puncto I velocius promoveri, quam in alio puncto G. Siquidem rectis AR, RD indefinite productis in V, et Æ, in eas cadant ex G, et I perpendiculares GE, IM, GZ, IX. Quia inexhauſtus eſt lacus ARDB, ſuperficies eius horizontalis AR nec deprimetur, nec attolletur, ſive manebit ſemper in eodem plano; unde lacus ARDB poteſt conſiderari ut vas ampliſſimum aqua conſtanter plenum, et emiſſarium eius CD, quod eſt prima ſectio fluminis CDPQ, cenſeri poteſt velut foramen parvum relate ad amplitudinem huius vaſis. His autem poſitis, ita oſtenditur propoſitio. Quia aqua effluit per ſe-

ſectionem C D perinde ac ſi efflueret per foramen in vaſis latere conſtitutum; utique tranſibit (296) per punctum D cum illa velocitate, quam acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex R D. Sed eadem deſcendendo poſtea ſuper planum inclinatum D P, eam in I acquirit celeritatem, quam acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex D X; ergo aqua in puncto I habebit illam velocitatem, quam acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex R X, vel M I. Simili modo oſtendam, aquam in puncto G velocitatem habere aequalem illi, quam grave acquirere poteſt cadendo in vacuo ex EG; ergo velocitas aquae in puncto I erit ad eius velocitatem in puncto G, ut velocitas acquiſita a gravi poſt lapſum per M I, ad illam, quae acquiri poteſt poſt caſum per E G. Sed cum M I maior ſit quam EG, velocitas acquiſita a gravi poſt lapſum per M I, eſt maior velocitate, quae acquiri poteſt poſt caſum per E G; ergo et velocitas aquae in puncto I erit maior velocitate, quam eadem aqua habet in puucto G.

Corollarium I.

487. Si duo puncta igitur Y, et O altitudinum G F, I K aequaliter diſtent a fundo D P; aqua in O erit velocior quam in Y. Siquidem perpendiculum ex puncto O ad horizontalem rectam A V demiſſum, longius erit alio, quod ad eandem demitti poteſt ex altero puncto Y.

Corollarium II.

488. Et cum idem eodem modo oſtendi poſſit de altitudinum aliis punctis, quae aequidiſtant ab eodem fundo; conſequens eſt, ut ſingulae aquae particulae, quae tranſeunt per I K, velociores ſint aliis, quae in pari a fundo diſtantia tranſeunt per G F.

Scholion I.

489. Ex theorematis huius demonſtratione ſequitur, curſum fluminis eo fieri celeriorem, quo magis recedit flumen ab eius ortu; id quod plerumque ſolet experientiae adverſari. Tenendum eſt itaque fundi inaequalitates gignere reſiſtentias, a quibus celeritas currentis aquae continuo retardatur, imo modo acquiſita, rurſus extinguitur. Id tamen tantummodo inculcandum eſſe cenſemus, quod quando fundi declivitas eſt exigua, etiam exigua eſſe ſoleat aquae gravitas relativa, quae indeſinenter accelerat eius motum. Unde ſi vis haec acceleratrix ſit ſemper aequalis reſiſtentiae ipſius fundi, quae poteſt conſiderari veluti vis retardans motum fluentis aquae; in hoc caſu aqua alvei fundum radens, motu aequabili progredietur cum illa velocitate, quam in ſuperiori tractu alvei acquiſivit.

Quin

Digitized by Google

Quin etiam ſi nova cauſa ſuperveniente, vis retardans augeri concipiatur, rurſus aquae velocitas minuetur. Quare ſaepius obſervamus, fluminis aquam lentiſſime promoveri in loco valde diſtanti ab eius ortu, ubi nempe ipſa deberet progredi velociſſime (486), ſi nullam reſiſtentiam in ſuperioribus fundi tractibus paſſa eſſet.

Scholion II.

490. Non ſolum aquae velocitas in naturali flumine retardatur ob fundi inaequalitates, verum etiam ob eius tranſitum ſucceſſivum a maiori fundi declivitate ad minorem aliam ſubſequentem. Dum enim aqua poſt percurſam aliquam fundi partem mutat directionem, et tranſit in aliam minus declivem, eius velocitas diminuitur perinde ac ſi incideret in obſtaculum; ideoque per alvei iſtam partem lentius promovebitur, quam per praecedentem. Atque hinc porro intelligitur cur in diverſis partibus eiuſdem alvei naturalis celeritas fluentis aquae ſit ut plurimum tam diverſa.

Propositio XCI.

491. *Si idem flumen* CDPQ (*Fig.* 118.) *in ſtatu manenti ſit; altitudo* IK, *quam habet aqua in inferiori aliquo puncto* I *fundi* DP, *minor erit altitudine* GF *eiuſdem in ſuperiori altero puncto* G.

Pone IK eſſe ipſi GF aequalem. Singulae aquae particulae, quae tranſeunt per IK, velociores ſunt aliis, quae in pari diſtantia a fundo (488) tranſeunt per GF. Eſt autem IK (ex hyp.) ipſi GF aequalis; igitur per IK plus aquae tempore dato fluet, quam per GF, ideoque non amplius flumen (479) in ſtatu manenti erit, contra hypotheſim. Pone deinde IK eſſe ipſa GF maiorem. Tum ſumpta IO rectae GF aequali, utique per IO plus aquae (ex demonſtr.) tempore dato fluet, quam per GF. Sed per IK plus aquae tempore dato tranſit, quam per IO; igitur per IK multo plus aquae tranſibit, quam per GF, ideoque non amplius erit (479) flumen in ſtatu manenti, iterum contra hypotheſim. Cum igitur ſit IK nec rectae GF aequalis, nec ipſa maior, ſequitur neceſſario ut ſit minor.

Propositio XCII.

492. *Velocitas aquae in infimo puncto* I *altitudinis* IK *eſt maior velocitate, quam eadem aqua habet in eius puncto ſupremo* K.

Ex puncto K ad horizontalem rectam AV demitti intelligatur perpendicularis KN. Quia in triangulo MAI rectus eſt angulus AML,

Digitized by Google

A M I, acutus erit alius M I A. Eſt autem rectus quoque angulus K I A; ergo acutus erit reliquus K I M, propterea ſi ex K ad M I demittatur perpendicularis K L, haec rectam M I ſecabit inter puncta I, et M, et ideo erit M I maior quam M L, vel N K. Sed velocitas aquae in I eſt (486) aequalis illi, quam acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex M I, et velocitas aquae in K aequalis illi, quam idem grave acquirere poteſt cadendo in vacuo per N K; igitur cum M I maior ſit quam N K, etiam velocitas aquae in puncto I erit maior velocitate eiuſdem in puncto K.

Scholion.

493. Si vero in praxi quandoque oppoſitum videamus, id reſiſtentiae fundi erit unice tribuendum. Particulae enim aquae radentes fundum, patiuntur maximam reſiſtentiam; reliquae vero in eadem ſectionis altitudine conſtitutae, eo minorem ſubeunt reſiſtentiam, quo remotiores ſunt ab eodem, ideoque fieri poteſt, ut aqua velocius moveatur in fluminis ſuperficie, quam in eius fundo.

PROPOSITIO XCIII.

494. *Si punctum* K *ſuperficiei fluminis* C D P Q *ab eius principio* A *magis diſtet quam aliud punctum* F *eiuſdem ſuperficiei; aqua in* K *erit velocior quam in* F.

Demiſſa ex F ad A V perpendiculari F T, agatur pariter ad G E perpendicularis F H. Quoniam rectae E G, M I perpendiculares ſunt ad A V, parallelae erunt etiam inter ſe; ideoque angulus M I A aequabitur E G A. Sed rectus quoque angulus K I A aequatur recto alteri F G A; ergo et reliquus K I L aequabitur reliquo F G H. Atqui etiam rectus angulus K L I eſt aequalis recto F H G; ergo triangulum I L K ſimile erit alteri G H F, unde L I erit ad H G, ut K I ad F G. Eſt autem K I minor (491) quam F G; igitur et L I minor erit quam H G. Sed eſt M I maior E G; ergo etiam M L, vel N K erit multo maior quam E H, vel T F. Sed velocitas aquae in K aequatur illi, quam acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex N in K, et velocitas in F aequalis illi, quam poteſt acquirere idem grave cadendo in vacuo ex T in F; ergo et velocitas aquae in K maior erit velocitate eiuſdem in puncto F.

L E M M A I.

495. *Si ratio quadrati* A B (*Fig.* 119.) *ad quadratum* C D *ſit maior quam ratio quadrati* E F *ad quadratum* H G; *etiam ratio* A B *ad* C D *erit maior quam ratio* E F *ad* H G.

Fiat,

Digitized by Google

Fiat, ut AB ad CD, ita EF ad quartam proportionalem HI; eritque quadratum AB ad quadratum CD, ut quadratum EF ad quadratum HI. Sed quadratum AB eſt (ex hyp.) ad quadratum CD in maiori ratione, quam quadratum EF ad quadratum HG; ergo etiam quadratum EF erit ad quadratum HI in maiori ratione, quam quadratum idem EF ad quadratum HG, unde quadratum HI minus erit quadrato HG, e HI minor HG. Cum itaque ſit HI minor quam HG, ratio EF ad HI maior erit quam ratio eiuſdem EF ad HG. Sed ratio AB ad CD eſt (ex conſtr.) aequalis rationi EF ad HI; ergo etiam ratio AB ad CD maior erit quam ratio EF ad HG.

LEMMA II.

496. *Si recta* AD (*Fig.* 120.) *utcunque ſecetur in* B, *et* C; *ratio* DB *ad* BC *erit maior quam ratio* DA *ad* AC.

Ducta ex A qualibet recta AH, et iuncta DH, ad hanc ex C ducatur parallela CF, conveniens cum recta AH in F. Puncta denique B, et H iunganrur recta BH, quae ipſi CF occurret in puncto E. Quia in triangulo DBH eſt CE parallela ad eius latus DH, erit DB ad BC, ut DH ad CE. Rurſus quoniam eſt GF parallela ad latus DH trianguli DAH, erit DA ad AC, ut DH ad CF. Sed cum CE minor ſit quam CF, ratio DH ad CE eſt maior quam ratio eiuſdem DH ad CF; ergo etiam ratio DB ad BC maior erit quam ratio DA ad AC.

PROPOSITIO XCIV.

497. *Si ſectio* GF (*Fig.* 118.) *ab origine fluminis minus diſtet, quam altera ſectio* IK; *ratio velocitatis in* G *ad velocitatem in* F *erit maior quam ratio velocitatis in* I *ad velocitatem in* K.

Producatur EG in S, donec SG fiat ipſi MI aequalis. Cum ergo aequentur SG, MI, ſitque HG (494) maior quam LI; erit SH minor quam ML; unde ratio SG ad SH maior erit quam ratio MI ad ML. Sed cum SG ſit ſecta in E, et H, ratio EG ad EH eſt (496) maior quam ratio SG ad SH; ergo et ratio EG ad EH multo maior erit quam ratio MI ad ML. Iam velocitates aquae in G, et F aequantur (486) illis, quas acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex reſpectivis altitudinibus EG, TF, ſive EG, EH, itemque velocitates aquae in I, et K ſunt aequales illis, quas idem grave acquirere poteſt cadendo in vacuo ex altitudinibus MI, NK, ſive MI, ML; ergo quadratum velocitatis in G erit ad quadra-

dra-

Digitized by Google

dratum velocitatis in F, ut E G ad E H, et quadratum velocitatis in I erit ad quadratum velocitatis in K, ut M I ad M L. Vidimus autem E G eſſe ad E H in maiori ratione, quam M I ad M L; ergo et quadratum velocitatis in G erit ad quadratum velocitatis in F in maiori ratione, quam quadratum velocitatis in I ad quadratum velocitatis in K, ideoque etiam velocitas aquae in G erit (495) ad velocitatem in F in maiori ratione, quam velocitas in I ad velocitatem in K.

Corollarium I.

498. Igitur in quacunque fluminis ſectione ratio velocitatum aquae in eius fundo, et in ſuperficie eſt eo minor, ſive eo magis accedit ad rationem aequalitatis, quo magis ſectio ab origine fluminis removetur.

Corollarium II.

499. Unde ſi ſectio ab origine fluminis maxime diſtet; velocitates aquae in fundo, et in ſuperficie ad ſenſum aequales erunt.

Corollarium III.

500. Et quoniam loca, in quibus ut plurimum capiuntur fluminis ſectiones, maxime ab origine eius diſtant; propterea ibi velocitas aquae in fluminis ſuperficie poterit (499) accipi ut aequalis velocitati in eius fundo.

Scholion.

501. Quod ſi contingat, ut velocitas aquae in ſuperficie ſenſibiliter maior ſit quam in fundo, id ab inaequalitatibus huius pendet. Cum enim illae particulae, quae fundum radunt, ab inaequalitatibus huius ſubeant maiorem motus retardationem, quam aliae remotiores ab eodem fundo; fieri utique debet, ut aqua celerius moveatur in ſuperficie, quam in fundo.

Lemma.

502. *Dum corpus* G (*Fig.* 121.) *deſcendit ſuper planum inclinatum* A B, *ipſum premit indeſinenter, eſtque haec preſſio ad pondus eiuſdem corporis, ut ſinus anguli, qui metitur declinationem plani a perpendiculo, ad ſinum totum.*

I. Ducta verticali recta A M, centro A, et radio A B deſcribatur circuli arcus B F, occurrens ipſi A M in F. Dein agatur horizontalis B D, quae cum verticali A M conſtituet rectum angulum;

BDA. Denique ad punctum contactus I ducta GI, quae erit plano AB normalis, agatur verticalis GP, inque ea accipiatur recta GH, quae referat pondus corporis abſolutum, et compleatur parallelogrammum KGIH. Dum corpus deſcendit ſuper plano inclinato AB, indeſinenter ſollicitatur vi ponderis ſui GH. Sed vis GH aequivalet ſimul ſumptis viribus GK, GI; ergo indeſinenter etiam ſollicitabitur viribus GK, GI. Sed vis GK utpote parallela ad planum AB, impenditur tota in promovendo deſcenſu corporis ſupra hoc planum; ergo reliqua vis GI unice impendetur ad planum hoc comprimendum, ideoque corpus G indeſinenter comprimet planum AB, ſuper quo deſcendit.

II. Quoniam GH exprimit pondus corporis abſolutum, et GI eius preſſionem (num. I.) exercitam contra planum; haec preſſio erit ad pondus, ut GI ad GH. Sed ob triangulum GIH ſimile ADB, eſt GI ad GH, ut BD ad AB; ergo et preſſio corporis G erit ad eius pondus, ut BD ad AB, ſive ut ſinus anguli BAF, qui metitur declinationem plani AB a perpendiculo AM, ad ſinum totum.

Corollarium I.

503. Hinc quamdiu plani declivitas eſt ſenſibilis, preſſio pondere minor erit. Dum enim ſenſibilis eſt declivitas plani AB, ſenſibilis eſt quoque inclinationis angulus ABD; ideoque BD ſenſibiliter minor erit ipſa AB. Sed preſſio eſt ad pondus (502), ut BD ad AB; ergo etiam preſſio pondere minor erit.

Corollarium II.

504. At ſi declivitas plani AB ita minui concipiatur, ut ſenſibiliter evaneſcat inclinationis angulus ABD; tunc preſſio ad ſenſum ponderi aequalis erit. Senſibiliter enim evaneſcente angulo ABD, ad ſenſum aequales fient BD, AB, et ita preſſio ponderi aequalis erit.

Propositio XCV.

505. *Dum movetur aqua intra declivem alveum* CDPQ (*Fig.* 118.), *ſuperior premit inferiorem, eſtque haec preſſio ad eius pondus, ut ſinus declinationis alvei a perpendiculo, ad ſinum totum.*

Quando movetur aqua in declivi alveo CDPQ, ſingula eius ſtrata inferiora poſſunt conſiderari, ut totidem fundi ad ſenſum plani, et aeque ac alveus inclinati. Sed quotieſcunque deſcendit corpus ſuper planum aliquod inclinatum, continuo ipſum premit (502), eſtque haec preſſio ad eius pondus, ut ſinus declinationis plani a perpendiculo, ad ſinum totum; ergo et dum aqua intra declivem alveum promovetur, ſuperior premet inferiorem, eritque haec preſ-

ſio

ſio ad eius pondus, ut ſinus declinationis alvei a perpendiculo, ad ſinum totum.

Corollarium I.

506. Hinc ſi ſenſibilis ſit declivitas fundi DP fluminis CDPQ; preſſio, quam ſubit particula I a verticali columella IW ipſi ſuperius incumbente, eiuſdem pondere minor (503) erit; at ſi declivitas fundi fuerit inſenſibilis, tunc preſſio ad ſenſum aequalis erit (504) ponderi eiuſdem columellae IW.

Corollarium II.

507. Unde ſi inſenſibilis ſit declivitas fundi DP; velocitas acquiſita a particula I ob preſſionem columellae IW, erit (296) ad ſenſum aequalis illi, quam grave acquiſiviſſet cadendo in vacuo ex WI. At ſi fundi declivitas ſit ſenſibilis; velocitas acquiſita a particula I ob preſſionem columellae WI, erit ſenſibiliter minor illa, quam grave acquiſiviſſet cadendo in vacuo ex WI.

PROPOSITIO XCVI.

508. *In quovis valde declivi flumine* CDPQ *velocitas aquae in deſcenſu acquiſita, non creſcit ob preſſionem ſuperius incumbentis.*

Poſtquam aqua deſcendit ex A in I, eam habet velocitatem (486), quam acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex MI; velocitas autem, quam eadem aqua acquirit in puncto I ob preſſionem columellae WI, eſt (507) ſenſibiliter minor illa, quam acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex WI. Eſt autem MI maior WI; ergo etiam velocitas, quam habet aqua poſt deſcenſum ex A in I, erit maior velocitate, quam eadem aqua acquirit ob preſſionem columellae WI. Sed corpus inſequens augere nequit velocitatem antecedentis celerius moti; igitur neque preſſio, quam particula I ſubit a columella WI, augere poteſt eius velocitatem acquiſitam poſt deſcenſum ex A in I.

Corollarium I.

509. Hinc duae ſunt cauſae velocitatis aquae in quavis fluminis ſectione. Prima eſt declivitas alvei, in quo movetur, aut motus acceleratio, quam acquirit per declivem alveum deſcendendo. Secunda eſt altitudo viva aquae ſuperius incumbentis, aut preſſio, quam aqua inferior ſubit a ſuperiore. Ita autem agunt hae duae cauſae, ut ſi velocitas orta a declivitate, ſit maior illa, quae a preſſione produceretur, tunc aquae velocitas tribuatur ſoli declivitati; at ſi contra velocitas aquae orta a preſſione, excederet

 ve-

velocitatem a declivitate alvei oriundam, tunc velocitas aquae preſſioni unice adſcribatur.

Scholion.

510. Id vero intelligi ſolum debet de velocitate aquae in fundo, vel prope fundum alvei conſtitutae. Quod autem ſpectat ad particulas alias aquae in ſuperficie fluminis exiſtentes, aut parum ab hac diſtantes, ipſae cum nullam, aut inſenſibilem preſſionem a ſuperioribus patiantur, habebunt velocitatem, vel a ſolo deſcenſu ortam, vel (ſi alveus foret abſolute horizontalis) ab earum cohaeſione cum inferioribus, a quibus trahi ad motum ſolent.

Corollarium II.

511. Dum ergo aqua in valde declivi alveo promovetur, velocitas omnium eius particularum (508) a ſola declivitate alvei derivatur; at cum declivitas alvei eſt exigua, ortum ducit haec velocitas partim a deſcenſu, et partim ab altitudine viva aquae, ipſi verticaliter incumbentis. Denique ſi contingat, ut alveus aut nullam, aut inſenſibilem habeat declivitatem; velocitas tota aquae particularum, ſaltem ſenſibiliter, pro cauſa habet ſolam altitudinem vivam aquae.

Propositio XCVII.

512. *Planum declive* A B (*Fig.* 122.) *referat fundum fluminis alicuius, et altitudo eius ſectionis in puncto* B, *ſit* B C. *Deinde haec eouſque protrahi concipiatur, donec in* L *occurrat horizontali rectae* A V *ductae per fluminis initium* A. *Demum vertice* L *circa axem* L B *deſcribi intelligatur quaevis parabola* L S K. *Dico, velocitates particularum aquae, quae tranſeunt per* C B, *eſſe ut ordinatae eiſdem particulis reſpondentes.*

Ductis ordinatis C S, B K, demittantur ex C, et B ad A V perpendiculares C E, B F, quae etiam erunt mutuo parallelae. Velocitates aquae in C, et B ſunt (486) reſpective aequales illis, quas acquirere poteſt grave cadendo in vacuo ex altitudinibus C E, B F; ergo quadratum velocitatis aquae in C erit ad quadratum velocitatis in B, ut C E ad B F. Sed cum in triangulo B F L ſit C E parallela ad latus eius B F, eſt C E ad B F, ut C L ad B L; ergo et quadratum velocitatis in C erit ad quadratum velocitatis in B, ut C L ad B L. Sed etiam in parabola L S K eſt quadratum ordinatae C S ad quadratum ordinatae B K, ut C L ad B L; ergo et quadratum velocitatis in C erit ad quadratum velocitatis in B, ut qua-

dra-

dratum ordinatae CS ad quadratum ordinatae BK, ideoque etiam velocitas in C erit ad velocitatem in B, ut ordinata CS ad ordinatam BK. Simili modo oſtendam, velocitates aquae in punctis aliis intermediis eſſe, ut intermediae ordinatae, quae illis reſpondent; ergo velocitates particularum aquae, quae tranſeunt per CB, erunt ut ordinatae illis reſpondentes in parabola LSK.

COROLLARIUM.

513. Hinc ordinatae CS, BK ad CB applicatae, erunt menſurae celeritatum relativarum, quas habent particulae C, et B, dum tranſeunt per altitudinem CB ſectionis; ideoque ſpatium parabolicum CSKB erit (469) complexus velocitatum, quas ſingulae particulae aquae habent, dum tranſeunt per CB.

SCHOLION.

514. Non inde colligi tamen poteſt, eaſdem ordinatas CS, BK eſſe quoque menſuras abſolutarum velocitatum, quas habent particulae C, et B. Menſura enim abſolutae velocitatis mobilis alicuius eſt ſpatium, quod idem tempore dato, ex. gr. minuto ſecundo abſolvit. Ita ſi particula C quovis minuto ſecundo percurrat ſpatium trium pedum; illico quanta ſit eius velocitas, innoteſcit, et ideo hoc ſpatium trium pedum erit menſura abſolutae eius velocitatis. Idem dicendum de velocitatibus abſolutis aquae tranſeuntis per alia altitudinis CB puncta.

PROPOSITIO XCVIII.

515. *Particulae aquae fluentis per extrema* C, *et* B (*Fig.* 122.) *altitudinis* CB *ſectionis, pari tempore abſolvunt ordinatas* CS, BK *cuiuſcunque parabolae* LSK *circa axem* BL *deſcriptae.*

Particula C tempore quovis dato ordinatam ſibi reſpondentem CS abſolvat. Quoniam particulae C, et B motu aequabili progrediuntur ſecundum rectas CS, BK, earum velocitates erunt, ut ſpatia ab ipſis pari tempore abſoluta. Sed velocitas particulae C eſt (512) ad velocitatem particulae B, ut ordinata CS ad ordinatam BK; ergo etiam ordinata CS erit ad ordinatam BK, ut ſpatium tempore dato a particula C percurſum, ad ſpatium a particula B eodem tempore abſolutum. Sed ordinata CS eſt (ex conſtr.) ſpatium tempore dato a particula C percurſum; ergo et ordinata BK erit ſpatium a particula B eodem tempore abſolutum.

PRO-

PROPOSITIO XCIX.

516. *Si particulae aquae fluentis per extrema* C, *et* B *altitudinis* CB *ſectionis, pari tempore abſolvant rectas* CS, BK *ad* CB *normaliter applicatas; ipſae erunt ordinatae parabolae alicuius, veluti* LSK, *circa axem* BL *deſcriptae.*

Quia particulae C, et B pari tempore abſolvunt rectas CS, BK; erit CS ad BK, ut velocitas particulae C ad velocitatem particulae B, et quadratum CS erit ad quadratum BK, ut quadratum velocitatis particulae C ad quadratum velocitatis particulae alterius B. Sed quadratum velocitatis particulae C eſt (512) ad quadratum velocitatis particulae B, ut CL ad BL; ergo et quadratum CS erit ad quadratum BK, ut CL ad BL. Haec autem praecipua eſt proprietas parabolae LSK circa axem BL deſcriptae; igitur rectae CS, BK erunt ordinatae parabolae LSK circa axem BL deſcriptae.

Corollarium I.

517. Hinc ſi particulae C, et B minuto ſecundo abſolvant rectas CG, BH; hae erunt (516) pariter ordinatae parabolae LGH circa axem BL deſcriptae.

Corollarium II.

518. Et cum idem quoque verificetur de aliis ſpatiis, quae reliquae aquae particulae in altitudine CB poſitae minuto ſecundo abſolvunt; patet, quantitatem aquae per hanc altitudinem minuti ſecundi tempore effluentis, aequari ſpatio parabolico CGHB.

Corollarium III.

519. Quia particulae C, et B minuto ſecundo abſolvunt ordinatas CG, BH parabolae LGH; ipſae erunt (514) quoque menſurae abſolutarum velocitatum, quas habent particulae C, et B.

Corollarium IV.

520. Cum etiam aliae aquae particulae in altitudine CB poſitae, minuto ſecundo (515) abſolvant ordinatas ſibi reſpondentes in parabola LGH; hae quoque (514) erunt menſurae velocitatum abſolutarum, quas ipſae habent, et propterea ſpatium parabolicum CGHB erit quoque complexus abſolutarum velocitatum aquae per altitudinem CB fluentis.

LEM-

Digitized by Google

LEMMA I.

521. *Datis in ſpatio parabolico* CGHB (*Fig.* 124) *ordinatis* CG, BH, *datoque etiam axis ſegmento* CB, *quod ab iiſdem eſt interceptum; axem parabolae invenire.*

Indefinite producta BC in O, fiat, ut differentia quadratorum BH, CG ad quadratum CG, ita recta BC ad quartam proportionalem CL. Dico, BL quaeſitum eſſe parabolae eiuſdem axem. Nam cum differentia quadratorum BH, CG ſit ad quadratum CG, ut BC ad CL; utique componendo, quadratum BH erit ad quadratum CG, ut BL ad CL, ideoque BL erit axis parabolae, qui petebatur.

LEMMA II.

522. *Iiſdem datis, quae in lemmate praecedenti, invenire aream parabolici ſpatii* CGHB.

Ex datis ordinatis CG, BH, et ſegmento axis CB, quaere 1.° axem BL (521). 2.° Ex inventa BL aufer BC, ut inde nota fiat CL. 3.° Ex datis BL, BH inveſtiga aream ſegmenti parabolici LHB, et ex datis CL, CG aream ſegmenti alterius LGC. 4.° Ex area ſegmenti parabolici LHB ſubduc illam ſegmenti alterius LGC, et reſiduum erit quaeſita area ſpatii parabolici CGHB.

PROPOSITIO C.

523. *Data altitudine* CB *ſectionis* (*Fig.* 122.), *et datis etiam ſpatiis* CG, BH, *quae particulae fluentes per* C, *et* B, *minuto ſecundo abſolvunt, quantitatem aquae determinare, quae per hanc altitudinem tempore dato fluit.*

Quia aquae particulae tranſeuntes per extrema C, et B altitudinis CB ſectionis, minuto ſecundo (ex hyp.) abſolvunt ſpatia CG, BH; haec utique erunt (516) ordinatae parabolae LGH circa axem LB deſcriptae, et ideo quantitas aquae per altitudinem CB minuti ſecundi tempore effluentis, aequabitur (518) ſpatio parabolico CGHB. Sed in ſpatio parabolico CGHB ex datis ordinatis CG, BH, et ſegmento axis BC, eius area (522) invenitur; igitur etiam data altitudine BC ſectionis, et datis quoque ſpatiis BH, CG, quae particulae aquae fluentes per C, et B minuto ſecundo abſolvunt, invenietur quantitas tota aquae, quae per eandem altitudinem tempore dato fluit. PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO CI.

524. *Iiſdem datis, quae in propoſitione antecedenti, invenire menſuram mediae velocitatis abſolutae, quam habet aqua, dum tranſit per altitudinem* CB *ſectionis.*

Ex datis in ſpatio parabolico CGHB ordinatis CG, BH, et axis ſegmento CB, quaere (521) axem BL parabolae LGH. Dein ex illo aufer CB, ut nota fiat CL. Denique ex datis abſciſſis CL, BL, et reſpondentibus ordinatis CG, BH, fac (312) rectangulum CMNB aequale ſpatio parabolico CGHB, et duc ex puncto O ordinatam IO. Dico, hanc eſſe menſuram velocitatis mediae abſolutae, qua aqua fluit per altitudinem CB ſectionis. Nam quia particula I minuto ſecundo abſolvit (520) ordinatam ſibi reſpondentem IO; utique ſi omnes aquae particulae, quae tranſeunt per CB, moverentur cum velocitate IO, qua particula I movetur, quantitas aquae minuto ſecundo per altitudinem CB fluentis, aequalis eſſet rectangulo CMNB. Huic autem (ex conſtr.) aequatur ſpatium parabolicum CGHB; ergo ſi omnes aquae particulae, quae tranſeunt per CB, moverentur cum velocitate IO, qua particula I movetur, quantitas aquae minuto ſecundo tranſiens per CB, aequalis eſſet ſpatio parabolico CGHB. Sed etiam quantitas aquae, quae velocitatibus variis mota, minuto ſecundo per altitudinem CB tranſit, aequatur (518) ſpatio parabolico CGHB; ergo ſi omnes aquae particulae, quae tranſeunt per CB, moverentur cum eadem velocitate IO, qua particula I movetur, tanta quantitas aquae minuto ſecundo flueret per CB, quanta per eandem velocitatibus variis fluit, ideoque velocitas abſoluta, qua particula I movetur, erit (472) media velociias abſoluta aquae per altitudinem CB fluentis. Sed ordinata IO eſt (514) menſura abſolutae velocitatis, qua particula I movetur; ergo etiam menſura erit mediae velocitatis abſolutae, cum qua fluit aqua per altitudinem CB ſectionis.

PROPOSITIO CII.

525. *Si quantitas aquae, quae minuto ſecundo velocitatibus variis fluit per altitudinem* CB, *per hanc dividi concipiatur; in quoto prodibit recta, quae menſura erit eius velocitatis mediae abſolutae.*

Quantitas aquae, quae minuto ſecundo velocitatibus variis effluit per CB, aequatur (518) ſpatio parabolico CGHB. Huic autem (524) aequatur rectangulum CMNB; ergo eadem aquae quantitas etiam aequalis erit rectangulo CMNB. Sed ſi dividas hoc re-

ctan-

ſtangulum per eius baſim C B, in quoto prodibit altitudo eiuſdem C M, vel I O; ergo ſi etiam quantitas aquae, quae minuto ſecundo velocitatibus variis effluit per C B, concipiatur dividi per hanc rectam, in quoto ptodibit recta I O. Vidimus autem (524) hanc rectam I O eſſe menſuram mediae velocitatis abſolutae, quam habet aqua per altitudinem C B fluens; ergo ſi quantitas aquae, quae minuto ſecundo efflluit per C B, per hanc dividi concipiatur, in quoto prodibit recta, quae menſura erit eius mediae abſolutae velocitatis.

PROPOSITIO CIII.

526. *Ut aqua intra canalem aliquem progrediatur, non opus eſt, ut eius fundus ſit inclinatus ad horizontem.*

Sit lacus inexhauſtus C E A D (Fig. 123), ſive talis, ut ſuprema eius ſuperficies C E ſit ſemper in eodem plano horizontali. Tum infra hanc ſuperficiem in eius latere fiat rectangulare aliquod foramen B A, quod ſub initio cataracta aliqua claudi debet, ne aqua e lacu exire poſſit. Denique ad foraminis huius extremitatem A applicetur fundus A H canalis horizontalis B A H O, qui tum liberum exitum in H habeat, tum etiam ſit eiuſdem altitudinis, et latitudinis cum praedicto foramine B A. Hoc facto, ſi cataracta qua foramen clauditur, ſubito attollatur; ſingulae aquae particulae in foramine B A poſitae, horizontaliter promovebuntur, unaqueque nimirum (296) cum illa velocitate, quae convenit preſſioni, aut altitudini aquae ſuperius incumbentis. Unde quolibet ſumpto tempore poſt foraminis aperitionem, ex. gr. illo, quo particula fluens per punctum A pervenit uſque ad Z, ſi vertice E circa axem E A deſcribatur per Z parabola E L Z; utique particula aquae, quae ex ſummitate B foraminis A B fluit, poſt illud tempus (515) appulſa erit ad punctum L. Si pariter tempus aliud accipiatur, quo nempe particula fluens per punctum A, pervenit uſque ad punctum F, vel G; tunc deſcriptis parabolis E K F, E P G, particula erumpens ex puncto B, poſt illud tempus reperietur in K, vel P. Idem autem oſtendi poteſt de aliis aquae particulis intermediis, quae per intermedia alia puncta foraminis egrediuntur; igitur tota aqua tranſiens per A B, horizontaliter promovebitur in canali B A H O, et ideo ut aqua intra canalem aliquem progrediatur, non opus eſt, ut eius fundus ſit inclinatus ad horizontem.

COROLLARIUM.

527. Hinc dum aqua currit in canali aliquo horizontali, veluti B A H O, habebit ſuperficiem horizontalem, mobilem, et permanentem.

Digitized by Google

PROPOSITIO CIV.

528. *Si ex filo* CH (*Fig.* 125. 126.) *fixo ad centrum* C *quadrantis circuli* CBA, *cuius radius* CA *eſt normalis ad horizontem, pendeat globus* H, *qui immerſus aquae currenti ſecundum directionem* ET, *ab huius vi ſuſtineatur ſub diſtractionis angulo* ECH, *aut* ECR; *pondus quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae, qua ſuſtinetur, ut* CE *ad* ER.

Verticalis recta HK exponat pondus, quod globus in aqua habet. Tum ita producta HK in O, ut ſit HO ipſi HK aequalis, agatur OL ad ET parallela, quae occurrat filo CH in L, et compleatur parallelogrammum LOIH. Tres vires hic ſimul agunt in globum H. Prima eſt pondus, quod globus in aqua habet, quodque in hunc agit iuxta directionem HK. Secunda eſt vis aquae ipſum impellens ſecundum directionem ET, vel HI. Tertia demum eſt reſiſtentia inſuperabilis puncti C, quae in globum agit ſecundum rectam HL. Hae autem tres vires ſunt (ex hyp.) in aequilibrio inter ſe; igitur etiam erunt (a) ut tres rectae HO, HI, HL, ideoque pondus, quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae qua ſuſtinetur, ut HO ad HI. Sed ob triangulum OHI ſimile CER, eſt HO ad HI, ut CE ad ER; ergo et pondus, quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae, qua ſuſtinetur ſub angulo ECR, ut CE ad ER.

Corollarium.

529. Unde ſi idem globus longiori filo C*b* ſuſpenſus, aquae profundius immergatur, et quieſcat ſub diſtractionis angulo EC*b*, aut EC*r*; pondus quod globus in aqua habet, erit ad vim aquae qua ſuſtinetur, ut CE ad E*r*.

Scholion.

530. Pondus quod globus in aqua habet, dicitur *pondus reſpectivum*, eſtque (98) minus pondere abſoluto eiuſdem globi.

PROPOSITIO CV.

531. *Iiſdem poſitis, vis aquae ſuſtinens globum* H *ſub angulo* ECR, *erit ad eius vim, quae eundem ſuſtentat ſub alio angulo* EC*r*, *ut* ER *ad* E*r*.

Vis aquae ſuſtinens globum H ſub angulo ECR, eſt (528) ad pondus reſpectivum eiuſdem globi, ut ER ad CE. Sed etiam pondus

(a) Per noſtram Mechanicam. Coroll. prop. 13. §. 102. pag. 34.

dus reſpectivum globi H eſt (529) ad aquae vim, quae ipſum ſuſtinet ſub angulo E C r, ut C E ad E r; ergo ex aequo, vis aquae ſuſtinens globum H ſub angulo E C R, erit ad aquae vim, quae eundem ſuſtinet ſub angulo E C r, ut E R ad E r.

PROPOSITIO CVI.

532. *Si directio* E T (*Fig.* 126.) *fluentis aquae ſit horizontalis; vis aquae ſuſtinens globum* H *ſub angulo* E C R, *erit ad aquae vim, quae ipſum ſuſtinet ſub angulo* E C r, *ut tangens anguli* E C R *ad tangentem anguli* E C r.

Agatur horizontalis A G, quae parallela erit ad directionem aquae E T, et quadrantem circuli tanget in puncto A. Quia in triangulo C E R eſt A F parallela ad eius latus E R; erit E R ad A F, ut C E ad C A. Sed cum A f ſit pariter parallela ad latus E r trianguli E C r, erit etiam E r ad A f, ut C E ad C A; ergo etiam E R erit ad A F, ut E r ad A f, et permutando E R erit ad E r, ut A F ad A f. Sed vis aquae ſuſtinens globum H ſub angulo E C R, eſt (531) ad eius vim, quae eundem ſuſtinet globum ſub angulo E C r, ut E R ad E r; ergo etiam vis prima erit ad ſecundam, ut A F ad A f, ſive ut tangens anguli E C R ad tangentem anguli E C r.

COROLLARIUM I.

533. Quoniam hae duae vires ſunt (325) ut quadrata velocitatum aquae in locis H, et b; utique etiam quadratum velocitatis aquae in loco H, erit ad quadratum velocitatis eiuſdem aquae in loc b, ut tangens anguli E C R ad tangentem anguli E C r.

COROLLARIUM II.

534. Si ergo ope quadrantis circuli C B A in gradus, et minuta diviſi, menſurentur gradus arcuum A Q, A q, quos intercipiunt anguli A C R, A C r, indeque ex tabulis ſinuum depromantur illorum tangentes A F, A f; dabitur (533) ſtatim ratio, quae intercedit inter quadrata velocitatum aquae in locis H, et b, atque adeo etiam ratio earundem velocitatum.

COROLLARIUM III.

535. Hinc ſi determinetur velocitas abſoluta aquae in uno caſu, ex. gr. in fluminis ſuperficie (quod ope corporis alicuius innatantis aquae facile obtinetur), poterit etiam ope eiuſdem globi determinari velocitas abſoluta aquae in omni caſu.

Digitized by Google

PROPOSITIO CVII.

536. *Dato tum diſtractionis angulo* ECR (*Fig.* 125.), *ſub quo currens aqua ſuſtinet globum* H, *tum etiam angulo* ZET, *quo nempe directio aquae* ET *declinat a recta horizontali* EZ; *determinare angulum* CRE *filo* CH, *et recta* ET *contentum*.

Cum datus ſit rectus angulus ECB, et detur etiam (ex hyp.) angulus ECR; dabitur quoque reliquus RCB, aut DCB. Verum ob parallelas CB, EZ, angulus DCB aequatur alteri CDE; igitur etiam notus erit angulus CDE. Hic autem utpote externus trianguli EDR, eſt aequalis ſummae angulorum DER, DRE; ergo haec ſumma pariter nota erit. Sed datus eſt (ex hyp.) illorum unus, ſcilicet DER; ergo et innoteſcet reliquus DRE, aut CRE.

PROPOSITIO CVIII.

537. *Iiſdem poſitis, pondus determinare aequivalens vi* HI, *qua nempe aqua ſuſtinet globum* H *ſub diſtractionis angulo* ECR.

Ex dato tam diſtractionis angulo ECR, quam inclinationis altero ZET, quaeratur (536) angulus CRE. Deinde fiat, ut ſinus inventi anguli CRE ad ſinum dati anguli ECR, ita pondus reſpectivum globi H ad quartum terminum proportionalem; Dico, hunc exprimere pondus aequivalens vi HI. Nam ſi inventum hoc pondus vocetur P; pondus reſpectivum globi H erit (ex conſtr.) ad pondus P, ut ſinus anguli CRE ad ſinum anguli ECR, vel ut CE ad ER. Sed vis HO eſt (528) quoque ad vim HI, ut CE ad ER; ergo et pondus reſpectivum globi H erit ad pondus P, ut vis HO ad vim HI. Sed pondus reſpectivum globi H aequivalet (528) vi HO; ergo et pondus P aequivalebit alteri vi HI, qua nempe aqua ſuſtinet globum H ſub angulo ECR.

PROPOSITIO CIX.

538. *Si aqua, quae dum currit ſecundum directionem* ET, *ſuſtinet globum* H *ſub angulo* ECR, *de repente omnem amittat motum, et ex adverſo quadrans circuli* CBA, *una cum globo ſuſpenſo* H *progrediatur in aqua immota iuxta rectam* TE *cum eadem velocitate, qua aqua antea ferebatur; globus* H *ſuſtinebitur, uti prius, ſub eodem diſtractionis angulo* ECR.

Glo-

Digitized by Google

Globus H eandem ab aqua excipit impreſſionem (354), ſive aqua currens ſecundum directionem ET cum data velocitate in quieſcentem impingat globum, ſive quadrans circuli, una cum globo ſuſpenſo H feratur in aqua immota iuxta rectam TE cum eadem velocitate, qua aqua antea ferebatur. Atqui impreſſio, quam in primo caſu excipit globus H, retinet (ex hyp.) hunc ſuſpenſum ſub diſtractionis angulo ECR; ergo etiam impreſſio, quam idem globus excipit in ſecundo, ipſum ſimiliter ſuſtinebit ſub diſtractionis angulo ECR.

Corollarium.

539. Quia in caſu in quo movetur globus, et aqua quieſcit, impreſſio a globo excepta, fit a reſiſtentia eiuſdem aquae: in caſu autem in quo aqua movetur, et globus quieſcit, impreſſio facta in globo, procedit a vi HI; ſequitur, reſiſtentiam aquae in primo caſu aequari etiam vi HI.

L E M M A.

540 *Supra circulum* NS (*Fig.* 127. 125.) *aequalem circulo maximo globi* H, *cylindrum aqueum conſtruere, cuius pondus aequetur alteri dato* P.

Fiat 1.°, ut pondus unius pedis cubici aquae ad pondus aquae alteri P aequale, ita pes cubicus aquae ad quartum terminum proportionalem, qui erit volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P. 2.° Volumen aquae hoc modo inventum, dividatur per circulum datum NS, et quoto qui inde emergit, aequalis fiat longitudo rectae NM. 3.° Super baſim NS, et ſub altitudine inventa NM cylindrus MS aqueus efficiatur. Dico, hunc eſſe, qui petebatur. Nam recta NM (ex conſtr.) eſt quotus, qui oritur dividendo volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P, per circulum datum NS. Sed ſi quotum ducas in diviſorem, factum inde ortum aequabitur dividendo; igitur factum ex recta NM in circulum NS ducta, aequabit volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P. Idem autem factum eſt volumen aquei cylindri MS; ergo etiam volumen aquei cylindri MS aequabit volumen aquae, cuius pondus aequatur alteri dato P, ideoque pondus cylindri MS aequabitur dato P.

P R O P O S I T I O CX.

541. *Dato tum diſtractionis angulo* ECR (*Fig.* 125.), *ſub quo ſuſpenditur globus* H, *tum etiam declinationis altero* ZET, *vel* DER, *alti-*

Digitized by Google

altitudinem invenire, ex qua ſi caderet idem globus, eam acquireret velocitatem, quam habet aqua in loco H.

Quaeratur (537) pondus P aequivalens vi HI, qua nempe aqua ſuſtinet globum H ſub angulo ECR. Tum ſuper baſim NS (Fig. 127.) circulo maximo globi H aequalem, fiat (540) cylindrus aqueus MS, cuius pondus aequetur alteri dato P. Dico, altitudinem eius MN eſſe illam, quae petebatur. Nam, ſi fieri poteſt, altitudo ex qua globus cadendo in vacuo acquireret velocitatem, quam habet aqua in loco H, non ſit MN, ſed VN, maior ſcilicet quam MN, et aqueus cylindrus MS produci intelligatur uſque ad V. Iam ſi ponas aquam immotam eſſe, et viceverſa quadrantem circuli CBA, una cum globo H iuxta directionem TE grogredi intra illam cum eadem velocitate, qua aqua antea ferebatur; utique reſiſtentia quam globus patitur hoc in caſu, aequabitur (354) vi HI, qua nempe aqua dum movebatur, ſuſtinebat eundem globum ſub angulo ECR. Sed reſiſtentia quam globus patitur in hoc caſu, valet pondus (365) aquei cylindri VS, et vis aquae HI ſuſtinens globum in primo caſu, valet (540) pondus cylindri aquei MS; ergo et pondus aquei cylindri VS aequabitur ponderi aquei cylindri MS, totum parti, quod eſt abſurdum. Falſo itaque ponebatur, altitudinem ex qua globus cadendo in vacuo, acquireret celeritatem qua fertur aqua in loco H, eſſe VN, maiorem ſcilicet quam MN. Pari modo conſtabit, hanc altitudinem non poſſe minorem eſſe quam MN; ergo altitudo quaeſita erit MN.

Corollarium.

542. Quia altitudine MN inventa, ſtatim ex tabulis depromi poteſt (307) abſoluta velocitas ipſi debita; ideo etiam invenietur velocitas abſoluta aquae in loco H.

CAPUT XII.

De fluminum curſu obſtaculis impedito.

DEFINITIO XV.

543. Si dum fluminis aqua tranſit per aliquam ſectionem, incidat in obſtaculum impediens eius motum; illa ſectio dicitur *impedita*; aliae autem eiuſdem fluminis ſectiones, in quibus nullum eſt impedimentum, *liberae* nuncupantur.

Scho-

Digitized by Google

Scholion.

544. Obſtacula, quae impediunt curſum fluminis, ſunt diverſa; alia enim ſunt perpetua, et uniformia, alia vero quaſi perpetua, et difformia. Obſtacula primi generis ſunt reſiſtentiae attritus, aut frictionis, quas indeſinenter ſubit flumen in riparum, et fundi aſperitatibus ſuperandis. Obſtacula ſecundi generis ſunt 1.° diminutiones declivitatis, quas ordinatim, et ferme perpetuo habet fundus, dum ab origine fluminis recedendo, ad mare accedit. 2.° Varii flexus alvei, et latitudines eius auctae. 3.° Cataractae, gurgites aquae, congeries lapidum, et arenarum, quae paſſim in fundo alvei eſſe ſolent; aliaeque huius generis reſiſtentiae, quae agentes aut ſimul, aut ſeparatim, nedum impediunt aquae accelerationem, ſed poſitivam etiam retardationem inferunt aquae motui.

Definitio XVI.

545. Si ſingulae aquae particulae conſtitutae tam in ſummitate ſectionis, et in fundo, quam in intermediis aliis eius punctis, incidant in obſtacula, quae tantundem retardent illarum motum, quantum hic interea acceleratur vel ob deſcenſum, vel ob preſſionem aquae ſuperius incumbentis; tunc velocitas earundem dicitur *reducta ad aequabilitatem*.

Propositio CXI.

546. *Si dum aqua currit intra alveum inclinatum, incidat in obſtaculum, ſuperficies eius altius quam antea elevabitur.*

Planum inclinatum BK (Fig. 128.) ubivis aeque latum, referat fundum fluminis, ſuper quem motu ſenſibiliter accelerato deſcendat aqua ex B in K. Iam ſepoſitis omnibus impedimentis, ſectiones BA, GL continuo (491) minuentur, et ideo pars quaevis eius ſuperficiei AL eo proximior erit fundo, quo remotior erit a puncto A. Perventa autem aqua ad ſectionem GL, ponamus velocitates ſingularum eius particularum tam in ſuperficie, quam in fundo, et eius medio exiſtentium, ad aequabilitatem ſenſibilem perveniſſe, eandemque (propter obſtacula uniformia, quae protrahantur uſque ad punctum K) in ſequenti etiam tractu GK perpetuo conſervari; utique hoc in caſu flumen in toto tractu GK eandem ſemper habebit altitudinem aquae vivae, et ideo aequales erunt altitudines GL, KM, conſequenter ſuperficies LM erit paral-

Digitized by Google

parallela ad fundum GK. Verum ſi ponas aquam in ſectione KM incidere in obſtaculum, quod minuere poſſit vel in omnibus eius particulis, vel in aliquibus earundem gradum illum aequabilis velocitatis, quem in ſuperiori tractu GK habebat; ſtatim eius velocitas minuetur, et ideo per ſectionem impeditam KM tempore dato effluet aquae quantitas minor illa, quae antea per eandem liberam effluebat. Sed ad ſectionem impeditam KM eadem adhuc quantitas aquae confluit, quae antea ad eandem liberam confluebat; ergo neceſſe erit aliquid eius continuo remanere, atque ita aquam in loco K altius quam antea elevari.

Corollarium I.

547. Unde ſi fiat, ut velocitas media, quae conſurgit ex omnibus reſiduis velocitatibus particularum aquae, poſtquam ipſae in obſtaculum inciderunt, ad velocitatem mediam, quae reſultat ex omnibus velocitatibus earundem particularum, antequam ipſae inciderent in obſtaculum, ut KM ad KC; eſſet (482) KC altitudo, ad quam aſſurgeret aqua in loco K, ſi in ipſo actu elevationis particulae eius inferiores nihil velocitatis amiſſae recuperarent ob preſſionem aliarum ſuperius incumbentium. Hic autem caſus ſemper habebit locum, quamdiu velocitas particularum ab ipſo obſtaculo diminuta, erit adhuc maior velocitate, quae a preſſione KC produci poſſet.

Corollarium II.

548. At ſi haec velocitas diminuta eſſet minor velocitate, quae a preſſione KC produci poſſet; illa ob preſſionem hanc augeretur, ideoque ut per ſectionem factam in K, dato tempore efflueret tantum aquae, quantum interea confluit ad eandem, non amplius opus eſſet tota altitudine inventa KC, ſed ſufficeret minor alia, ut KD. Propterea hoc in caſu perventa aqua ad punctum D, ſtatim ceſſaret omnis elatio eiuſdem, ac proinde ſuperficies eius eodem in puncto D permanens prorſus eſſet.

Corollarium III.

549. Quoniam per ſectionem impeditam KD tantum aquae effluit (548); quantum antea effluebat per liberam ſectionem KM; velocitas media aquae in ſectione KD erit (482) ad mediam eius velocitatem in ſectione KM, ut KM ad KD. Eſt autem KM minor KD; ergo et velocitas media aquae in ſectione impedita KD, minor eſt media velocitate eiuſdem in libera ſectione KM. Unde aqua per vim preſſionis non recuperat totam illam velocitatem, quam antea amiſerat propter obſtaculi reſiſtentiam.

Co-

Digitized by Google

Corollarium IV.

550. Et cum aqua uſque ad D elata, nequeat ibi ſuſpenſa haerere, quin ſe expandat ſupra ſuperficiem LM uſque ad certum limitem, ut NO; patet in hac pariter ſuperficie aliquam futuram eſſe aquae elevationem, et quidem talem, ut ſuperiores fluminis ſectiones poſitae prope KD, eo minus ſint altae, minusque propterea impeditae, quo magis ad ſectionem NO accedunt. Hinc ſuperficies elata aquae habebit uſque ad NO poſitionem DN minus declivem ſcilicet quam LM.

Scholion.

551. Haec omnia vera ſunt cuiuſcunque generis ſit obſtaculum ſectoni KM admotum. At ſi in ſectionibus poſitis infra KM, obſtaculum hoc ceſſaret; tunc poſſet flumen mediante novo deſcenſu rurſus accelerari, deprimi, et acquirere vel totam, vel ſaltem partem illius velocitatis, quam propter obſtaculum iam amiſerat.

Lemma I.

552. *Si planum horizontale, ſuper quo corpus ſolidum promovetur, perpetuas, et uniformes habuerit aſperitates; reſiſtentia frictionis quam patietur, erit conſtans, et uniformis.*

Sive plani aſperitates conſiderentur ut pili elaſtici deprimendi, et poſtea ſponte ſua ſe iterum erigentes, ſive ut fila a mobili perrumpenda, vel alio quovis modo hiſce aequivalente, ad omnia haec praeſtanda requiritur ſemper vis quaedam determinata, nec refert quae velocitas ſit agentis. Unde ſicuti corpus motum in fluido glutinoſo, eandem perpetuo vim inſumit ad eius particulas invicem ſeparandas, quacunque demum velocitate feratur: ita dum ſuper plano uniformiter aſpero promovetur, eandem perpetuo vim impendet ad vincendas eius aſperitates, ſive parva, ſive magna velocitate progrediatur. Quapropter eodem modo, quo ſupra (374) oſtenſum fuit, reſiſtentiam quam ſubit corpus ex uniformi partium fluidi tenacitate, conferri poſſe cum reſiſtentia, quam corpus in altum proiectum ſubit a gravitate, etiam oſtendetur, reſiſtentiam corporis in plano uniformiter aſpero incedentis, conferri poſſe cum reſiſtentia corporis in altum proiecti orta ex gravitate. Atqui haec reſiſtentia eſt conſtans, et uniformis; igitur conſtans, et uniformis altera quoque erit.

Scholion.

553. Prima fronte apparet, aucta mobilis velocitate, frictionem quoque augendam eſſe. Nam quo velocius eſt corpus, quod ſuper plano uniformiter aſpero promovetur, eo plures illius prominentiae vel ſunt dato tempore abradendae, vel intra cavitates huius deprimendae, et ex eiſdem poſtea extrahendae. Nihilominus tantum abeſt, ut velocitas maior augeat frictionem, quin potius plerumque ipſam minuat. Dum enim unius corporis ſuperficies ſuper aliam alterius corporis promovetur, illius preſſio eſt in cauſa, ut prominentiae unius intra alterius cavitates profundius deprimantur. At ſi progredientis corporis ſuperficies adeo velox ſit, ut eius preſſio agens tam brevi temporis intervallo, nequeat prominentias intra cavitates deprimere ad tantam profunditatem, ad quantam eas preſſio magis continua depreſſiſſet; evidens eſt frictionem valde minorem inde futuram eſſe. Non ſolum autem id ratio ſuadet, ſed etiam docet experientia; ubi enim aliqua machina ad certum gradum velocitatis pervenit, minor quam antea fit affrictus. Non tamen colligi inde poteſt, eo minorem ſemper fieri frictionem, quo magis velocitas augetur; frictio ſiquidem aliquo in caſu ob alias cauſas, veluti ob nimis magnam fracturam partium prominentium, augeri poteſt.

LEMMA II.

554. *Si corpus ſolidum deſcendat ſuper planum aliquod inclinatum, quod perpetuas, et uniformes ubique habeat aſperitates; ſemper accelerabitur eius motus.*

Quia corpus ſuper planum aſperum inclinatum (ex hyp.) actu deſcendit, conſequens eſt, ut eius gravitas relativa ſit maior quam reſiſtentia ab aſperitatibus plani orta. Sed gravitas relativa eſt conſtans, et uniformis, pariterque conſtans, et uniformis (353) eſt reſiſtentia a plani aſperitatibus oriunda; ergo illarum differentia, quae ſingulis momentis ſolidum corpus ſollicitat ad deſcenſum, neceſſario conſtans, et uniformis futura erit, ac proinde motus corporis deſcendentis ſemper accelerabitur, licet per gradus minores illis, quas produxiſſet gravitas relativa, ſi nulla fuiſſet reſiſtentia frictionis.

Corollarium.

555. Hinc ſi ſolidum corpus deſcendat ſuper planum uniformiter aſperum, et inclinatum; nunquam eius motus ad aequabilitatem perfectam reduci poterit.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO CXII.

556. *Si aqua fluminis in declivi alveo progredientis, ſolam ſubeat reſiſtentiam a perpetuis, et uniformibus fundi, et riparum aſperitatibus oriundam; nunquam ad aequabilitatem perfectam, et mathematicam reducetur. Poterit tamen ad aequabilitatem phyſicam pervenire, ob alias ferme perpetuas reſiſtentias, in quas incurrit.*

I. Dum corpus ſolidum ſupra planum uniformiter aſperum, et inclinatum deſcendit, nunquam (555) eius motus ad aequabilitatem perfectam reduci poteſt, non obſtantibus perpetuis, et uniformibus aſperitatibus, in quas incurrit. Sed quod contingit in motu ſolidi ſupra hoc planum, idem evenit quoque in motu aquae intra declivem, et uniformiter ſcabrum alveum progredientis; ergo nec motus aquae in hoc alveo decurrentis ad perfectam, et mathematicam aequabilitatem reduci poterit, non obſtantibus perpetuis, et uniformibus aſperitatibus fundi, et riparum, quae indeſinenter vim aquae acceleratricem a declivitate alvei ortam minuunt.

II. Quamvis perpetua reſiſtentia, quam fluminis aqua ſubit in fundi, et riparum aſperitatibus ſuperandis, in cauſa ſit, ut aqua ad perfectam, et mathematicam aequabilitatem reduci nequeat; aliae tamen quaſi perpetuae reſiſtentiae, uti ſunt diminutiones declivitatis, quas ordinatim, et quaſi perpetuo habet fundus, congeries lapidum, et arenarum, quae hinc inde in alveo eſſe ſolent, aliaeque huius generis reſiſtentiae ita vim aquae acceleratricem a declivitate alvei ortam minuunt, ut incrementa velocitatis ab illa genita, ſenſibiliter evaneſcant. Atqui motus aquae fluminis hoc in caſu ad aequabilitatem phyſicam eſt redactus; igitur ad hanc ſaltem reduci poteſt.

SCHOLION I.

557. Id autem in fluminibus evenire conſtans nos docet experientia. Nam in eiuſdem fluminis ſectionibus aeque latis, et magno intervallo diſtantibus inter ſe, eandem ferme altitudinem vivam aquae perpetuo obſervamus. Unde etiam in tractibus valde magnis, qui magis ſunt regulares, videmus fluminis ſuperficiem eſſe ſenſibiliter parallelam ad eius fundum, etſi inclinatum ad horizontem. Id autem accidere nunquam poſſet, niſi velocitas media aquae in hiſce tractibus conſtitutae, haberet ſaltem ſenſibilem aequabilitatem, quae (481) cum aequalibus ſectionibus perpetuo iungi ſolet.

Digitized by Google

Scholion II.

558. Ut aqua fluminis intra declivem, et uniformiter ſcabrum alveum progredientis, ad aequabilitatem phyſicam, et ſenſibilem reducatur, non eſt neceſſe, ut ſingulae eius particulae conſtitutae in eadem altitudine ſectionis, velocitates ad ſenſum aequales habeant; ſed ſufficit ſolum, ut diverſae aquae particulae ad ſenſum retineant illos diverſos gradus celeritatis, quos per deſcenſum antea acquiſiverunt. Id vero accidit quotieſcunque incrementa velocitatis, quae ſingulis momentis ipſae acquirerent per deſcenſum, ab impedimentis, quae in eas agunt iuxta oppoſitam directionem, ſenſibiliter elidantur.

PROPOSITIO CXIII.

559. *Flumen in puncto* K (*Fig.* 128.) *tranſeat a directione* GK *ad aliam minus inclinatam* KF. *Sint autem in alvei tractibus* GK, KF *eadem obſtacula uniformia*, *et difformia*, *quibus flumen ad phyſicam aequabilitatem reduci poſſit*. *Dico*, *ipſum ad hanc tardius pervenire in tractu magis declivi* GK, *quam in alio minus inclinato* KF.

Fluminis aqua in alvei tractibus GK, KF ad aequabilitatem phyſicam non reducitur, niſi in utroque vis aquae acceleratrix phyſice ſit aequalis reſiſtentiae impedimentorum. Sed vis aquae acceleratrix eſt maior in tractu magis declivi GK, quam in alio minus inclinato KF, et reſiſtentia impedimentorum ponitur eadem in utroque; ergo cum (ex hyp.) poſſit flumen in tractibus alvei GK, KF aequabilitatem phyſicam adipiſci, utique ad hanc tardius reducetur in tractu magis declivi GK, quam in alio minus inclinato KF.

Corollarium I.

560. Velocitas aequabilis, quam habet flumen in tractu GK, maior erit aequabili velocitate, qua idem flumen movetur in alio tractu KF. Cum enim flumen in tractu GK ad aequabilitatem (559) tardius reducatur, quam in alio KF; utique eius motus antequam ad aequabilem reducatur, longiori tempore accelerabitur in tractu GK, quam in alio KF; ideoque velocitas aequabilis, quam habet flumen in primo tractu, erit maior illa, cum qua in altero promovetur.

Corollarium II.

561. Unde ſi rurſus in inferiori altero puncto F tranſeat flumen a directione KF ad aliam minus declivem FS, pariter-

terque in hoc novo tractu impedimenta eadem perſeverent, quae erant in ſuperiori tractu KF; velocitas aequabilis, quam habet aqua in tractu KF, erit maior aequabili velocitate, cum qua progredietur in tractu FS.

Corollarium III.

562. Quare in quavis diminutione declivitatis, quam ordinatim alveus adipiſcitur, ſemper fluminis aqua amittit partem illius velocitatis, quam acquiſiverat per deſcenſum.

Corollarium IV.

563. Et quia alveus fluminis conſideratur velut polygonum ex infinitis laterculis rectis conſtans, quae eo minorem habent declivitatem, quo magis ad mare accedunt; conſequens eſt, ut dum alveus iam pervenit ad minimam, et inſenſibilem declivitatem, velocitas acquiſita ab aqua fluminis per deſcenſum, tota, vel ferme tota extincta ſit.

Scholion.

564. Hic autem caſus, in quo ſcilicet tota, vel ferme tota extingui ſolet velocitas acquiſita a flumine per deſcenſum, iuxta Gulielminium admodum frequens eſt in fluminibus, quae ad declivitatem minimam, aut inſenſibilem devenerunt. Unde in illis velocitas aquae inferioris a ſuperioris preſſione repeti ſolum debet (511); velocitas autem aquae in ſuperficie fluminis conſtitutae, eſt (510) ſoli deſcenſui tribuenda.

PROPOSITIO CXIV.

565. *Altitudinem invenire, ex qua aqua cadendo in vacuo, acquirere poſſit illam velocitatem, quam actu habet in impedita fluminis ſectione.*

Per oſtium BR (Fig. 129.) inexhauſti lacus GBRV exeat flumen BRKP, originem realem habens in puncto A, ſectionem vero KP in K. Tum recta KP producta, donec conveniat cum horizontali ſuperficie lacus GB in O, in hanc ex K, I, P demittantur perpendiculares KL, IM, PN. Deinde vertice O circa axem OK deſcripta parabola OHZ, ipſi ex K, I, P ordinentur KZ, IC, PH, quae, ſemotis impedimentis, eſſent (512) aquae velocitates in reſpondentibus eiſdem punctis. Ponatur modo flumen ad ſectionem KP appulſum, ita incidere in obſtaculum, ut aqua in P amittat partem FH velocitatis eius PH, habeatque ſolum ſuperſtitem velocitatem PF. Denique ducta FE parallela ad axem OK, et ordi-

ordinata huic E D, fiat P O' ipſi O D aequalis, agaturque per O' horizontale planum O' A', quod rectis P N, I M, K L occurrat in N', M', L'. Dico, quod aqua cadendo in vacuo ex altitudine N' P, acquirere poteſt velocitatem P F, quam habet aqua in puncto P impeditae ſectionis K P. Velocitas enim, quam, ſepoſitis impedimentis, haberet aqua in puncto P, eſt (ex hyp.) ad actualem eius velocitatem eodem in puncto P, ut P H ad P F, vel ut ordinata P H ad ordinatam D E, aut ut radix quadrata abſciſſae O P ad radicem quadratam abſciſſae O D, ſive (ex conſtr.) ut radix quadrata abſciſſae O P ad radicem quadratam rectae O' P. Verum ob parallelas O' N', O N, eſt O P ad O' P, ut altitudo N P ad altitudinem N' P; ergo etiam velocitas P H erit ad velocitatem P F, ut radix quadrata altitudinis N P ad radicem quadratam altitudinis N' P. Sed etiam velocitas acquiſita ab aqua cadendo ex altitudine N P eſt ad velocitatem acquiſitam cadendo ex altitudine N' P, ut radix quadrata altitudinis N P ad radicem quadratam altitudinis N' P; ergo velocitas P H erit quoque ad velocitatem P F, ut velocitas acquiſita ab aqua cadendo ex altitudine N P, ad velocitatem acquiſitam cadendo ex altitudine N' P. Sed velocitas P H eſt (486) illa, quam aqua acquirere poteſt cadendo ex altitudine N P; ergo et velocitas P F erit illa, quam acquirere poteſt aqua cadendo ex altitudine N' P.

Corollarium.

566. Quia velocitas actualis P F eſt (565) illa, quam acquirere poteſt aqua cadendo ex altitudine N' P; patet; hanc quoque velocitatem eidem altitudini convenire.

Scholion.

567. In praxi haec altitudo ſequenti modo poterit inveniri. Quaeratur aliquo artificio velocitas actualis aquae in puncto P, aut ſpatium illud, quod aqua in puncto P tempore dato, ex. gr. minuto ſecundo abſolvit. Deinde in tabulis velocitatum deſcriptis a Belidoro, quaeratur altitudo ipſi conveniens. Ita ſi inveniatur aqua in puncto P intra minutum ſecundum abſolvere ſpatium ped. 17, poll. 3, lin. 10, ſtatim invenies altitudinem N' P eſſe pedum 5.

Propositio CXV.

568. *Iiſdem poſitis, ſi vertice O' circa axem O' K deſcribatur per F parabola O' F Q, quae eadem prorſus erit cum altera O H Z; velocitates actuales aquae in punctis quibuslibet I, et K, erunt ut reſpondentes ordinatae I T, K Q eiuſdem parabolae O' F Q.*

Sicut

Sicut velocitas actualis aquae in puncto P eſt (566) illa, quae convenit altitudini N'P', ſive diſtantiae puncti P a plano horizontali O'A': ita actuales velocitates aquae in punctis aliis I, et K eiuſdem ſectionis KP erunt illae, quae conveniunt altitudinibus IM', KL', ſive eorum diſtantiis ab eodem plano horizontali O'A'. Unde velocitas aquae in puncto I erit (268) ad velocitatem eiuſdem in puncto K, ut radix quadrata altitudinis IM' ad radicem quadratam altitudinis KL', ſive ut radix quadrata abſciſſae IO' ad radicem quadratam abſciſſae KO'. Sed etiam ordinata IT eſt ad ordinatam KQ, ut radix quadrata abſciſſae IO' ad radicem quadratam abſciſſae KO'; ergo et velocitas aquae in puncto I erit ad velocitatem eiuſdem in puncto K, ut ordinata IT ad ordinatam KQ.

Corollarium I.

569. Unde complexus velocitatum aquae fluentis per ſectionem KP, qui, ſepoſitis reſiſtentiis, fuiſſet (513) ſpatium parabolicum PHZK, nunc propter illas redactus erit ad ſolum ſpatium PFQK.

Corollarium II.

570. Quia velocitates, quas habet aqua in punctis quibuslibet I, et K ſunt (568) ut radices quadratae altitudinum reſpondentium IM', KL', ſive diſtantiarum a plano horizontali A'O'; liquet, particulas I, et K eaſdem omnino habere celeritates in impedita ſectione KP, quas in libera haberent, ſi fluminis origo eſſet in puncto A', quam ob rem idem punctum A' *origo aequivalens fluminis* appellatur.

Corollarium III.

571. Propterea velocitates particularum I, et K non ſunt ut radices quadratae, ſive (270) in ratione ſubduplicata altitudinum aquae Kl, Im eiſdem ſuperius incumbentis; alioquin particula P, utpote non habens aquam ſuperius incumbentem, nullam haberet quoque velocitatem, contra experientiam. Ne velocitates quidem particularum I, et K poſſunt eſſe in ratione ſubduplicata altitudinum IM, KL, ſeu diſtantiarum a plano AO, quod eſt realis origo fluminis BRKP; haec ſiquidem ratio velocitatum obtinet ſolum in hypotheſi, quod ſectio KP nullo modo ſit impedita.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT XIII.

De modo, quo ſolet flumen ope excavationis efficere alveum ſibi convenientem.

LEMMA

572. *SI planum inclinatum ex particulis terreis componatur, quae conſtantem, et uniformem habeant cohaeſionem; vis qua particulae hae reſiſtunt mutuae ſeparationi, erit eo maior, quo minor viciſſim erit declivitas eiuſdem plani.*

Circa centrum C quadrantis circuli BAE (Fig. 130.) poſita intelligantur diverſa plana, velut AC, MC, diverſimode inclinata ad planum horizontale EC. Sint autem haec plana ex particulis terreis compoſita, quae conſtantem, et uniformem ubique habeant cohaeſionem. Gravitas relativa, qua particulae plani AC ad deſcenſum ſollicitantur ſupra hoc planum, perpetuò conatur illas invicem ſeparare; contra autem cohaeſio mutua earundem reſiſtit indeſinenter huic ſeparationi. Sed hae duae vires agunt iuxta oppoſitas directiones; ergo ſi in plano AC fingantur aequales eſſe, minima vis extranea agens ſecundum rectam parallelam plano AC, ſeparabit particulas huius plani. Finge nunc ab hac vi corroſam eſſe maſſam terream ACM, et planum AC acquiſiviſſe poſitionem minus inclinatam MC. Hoc autem facto, terreſtres particulae poſitae in plano MC, habent quidem eandem (ex hyp.) cohaeſionem, quam habebant particulae in plano AC, ſed gravitatem relativam minorem habent; ergo ad ſeparandas particulas plani MC neceſſaria erit vis extranea maior illa, qua ſeparabantur particulae plani AC, ideóque vis qua particulae plani reſiſtunt mutuae ſeparationi, eſt eo maior, quo minor viciſſim eſt declivitas eiuſdem plani.

COROLLARIUM.

573. Hinc ſi tranſeat flumen a plano magis declivi BK (Fig. 128.) ad aliud minus inclinatum KF; reſiſtentia eius fundi in plano BK erit minor quam reſiſtentia eiuſdem in plano KF.

PROPOSITIO CXVI.

574. *Si fundus alvei a vi aquae in flumine progredientis alicubi excavetur; eius declivitas diminuitur.*

Digitized by Google

Planum A C (Fig. 130.) referat fundum alvei alicuius, in quo tanta ſit aquae currentis vis, ut rodere ipſum poſſit; utique hoc in caſu nulla ratio eſſe poteſt, cur actu fundum A C non rodat. Sed facta excavatione in fundo A C; hic neceſſario tranſire debet a poſitione A C ad aliam, ut M C; ergo poſt excavationem reperietur fundus in plano M C. Sed quia angulus M C E eſt minor altero A C E, declivitas fundi M C erit minor quam declivitas fundi A C; ergo dum fundus alvei excavatur, eius declivitas diminuitur.

PROPOSITIO CXVII.

575. *Tranſeat flumen per plura plana contigua* B K, K F, F S (*Fig.* 128.) *diverſimode inclinata ad horizontem. Praeterea ſint haec plana ex terreis particulis compoſita, quae conſtantem, et uniformem ubique habeant cohaeſionem. Tandem vis aquae in hoc flumine tanta ſit, ut poſſit plana ſingula excavare. Dico, in plano magis declivi* B K *maiorem futuram eſſe excavationem, quam in ſequentibus aliis* K F, F S *minus inclinatis ad horizontem.*

Quia fundus B K eſt declivior quam K F, vis aquae, quae terram excavat in B K, erit maior quam illa, quae eandem excavat in K F. Sed reſiſtentia fundi B K eſt (573) minor quam reſiſtentia fundi K F; igitur excavatio, quae producetur in fundo B K, erit maior quam illa, quae fiet in fundo K F. Simili modo oſtendam, excavationem factam in fundo K F fore maiorem illa, quae fiet in altero fundo F S.

PROPOSITIO CXVIII.

576. *Etſi vis aquae in flumine tanta ſit, ut poſſit divellere terrae partes, ex quibus alveus coaleſcit, et ita fundum, et ripas eiuſdem alvei excavare; nihilo tamen minus haec excavatio tandem ceſſare debet.*

I. Cum vis aquae poſſit a fundo divellere eius partes, nil quidem impediet quominus illas actu corrodat, easque poſtea ſecum ferat, adeo ut in fundo nova cavitas efficiatur. Sed quando fundus fluminis excavatur eius declivitas (574) diminuitur; conſequens ergo erit, ut in quavis excavatione (573) reſiſtentia fundi creſcat, et e contrario vis aquae, quae fundum excavat, minuatur. Unde ſi fundus alvei perpetuo excavetur, tandem neceſſe erit, ut hae duae vires oppoſitae inter ſe, ad aequalitatem, ſive ad aequilibrium redocantur. Facto autem hoc aequilibrio, non amplius vis aquae rodere poterit fundi partes; ergo etiam ceſſabit omnis in fundo fluminis excavatio.

II. Quia tanta eſt in flumine aquae vis, ut poſſit etiam a ripis

 di-

Digitized by Google

divellere earum partes; utique has debebit corrodere, et ſecum ferre. Hoc autem facto, augetur fluminis latitudo, et diminuitur altitudo; ergo dum aqua fluminis rodit ripas, velocitas, et vis aquae perpetuo minuuntur. Reſiſtentia autem riparum eadem ſemper manet; ergo tandem hae duae vires ad aequalitatem, ſive ad aequilibrium reducentur, atque ita aqua non amplius rodet ripas.

Scholion I.

577. Iuvat autem hic obſervare, vim aquae citius pervenire ad aequalitatem, ſeu aequilibrium cum reſiſtentia fundi, quam cum illa riparum. Siquidem primo in caſu duae cauſae conſpirant ſimul ad aequilibrium hoc formandum. Prima eſt vis aquae, quae diminuta fundi declivitate, decreſcit; altera vero eſt reſiſtentia fundi, quae diminuta fundi declivitate, augetur. Quare perpetuo diminuta vi fortiori, et ſimul aucta debiliori, ambae ad aequalitatem tandem reduci debent. In altero autem caſu unica ſolum cauſa tendit ad aequilibrium producendum, nempe vis aquae corrodens ripas. Haec autem vis quidem ob auctam fluminis latitudinem diminuitur, ſed reſiſtentia riparum eadem ſemper manet. Unde diminuta vi fortiori, et manente alia debiliori, ambae ad aequalitatem denique reducentur. Propterea vis aquae citius accedit ad aequalitatem, et aequilibrium cum reſiſtentia fundi, quam cum reſiſtentia riparum.

Scholion II.

578. Quando vis aquae fluminis iam pervenit ad aequalitatem, ſeu aequilibrium cum reſiſtentia eius fundi, flumen dicitur ſibi *ſtabilem, et permanentem alveum* effeciſſe; nulla enim ratio eſſe poteſt, cur denuo alveus hoc in caſu aliquam pati debeat mutationem.

Scholion III.

579. Itaque tria ſolent in quovis flumine convenire ad ſibi ſtabilem, et permanentem alveum efficiendum. Primum eſt qualitas materiae, ex qua fundus, et ripae alvei componuntur; terrae ſiquidem arenoſae facilius vi aquae cedunt, quam argillaceae, quarum partes tenacitate praeditae eſſe ſolent. Secundum eſt declivitas ipſius fundi; nam quo declivior eſt fundus arenoſus, aut argillaceus, eo maior fit a vi aquae in fundo alvei excavatio. Tertium denique eſt vis aquae; ubi enim haec vis eſt maior, ibi etiam citius, et facilius ſuperatur tam reſiſtentia cohaeſionis materiae alveum componentis, quam reſiſtentia fundi orta ab exigua eius declivitate. Propte-

pterea quodvis flumen eam declivitatem denique ſibi efficit, quae convenit vi eius aquae, et qualitati materiae, ex qua alveus coaleſcit.

PROPOSITIO CXIX.

580. *Manente eadem tenacitate, aut reſiſtentia materiae, ex qua alveus coaleſcit, quo maior in flumine erit vis aquae, eo minor viciſſim erit declivitas eius fundi.*

Manente eadem reſiſtentia materiae fundi, quanto maior erit vis aquae in flumine progredientis, haec applicata materiae fundi, tanto maiorem effectum edet. Hic autem effectus non alius eſſe poteſt quam fundi excavatio; ergo quo maior erit vis aquae fluminis, eo maior fiet quoque excavatio fundi. Sed quando maior fit in fundo alvei excavatio, eiuſdem fundi declivitas (574) diminuitur; ergo quo maior in flumine erit vis aquae, eo minor viciſſim erit declivitas eius fundi.

COROLLARIUM I.

581. Quoniam vis aquae prope fundum fluminis conſtitutae, ut plurimum pendet ab altitudine eius viva; ideo quo maior erit haec altitudo, eo minor viciſſim erit declivitas eius fundi.

COROLLARIUM II.

582. Quia aucta in flumine quantitate aquae vivae, eius quoque altitudo viva augeri ſolet; hinc quo maior erit in flumine quantitas aquae vivae, eo minor erit declivitas eius fundi.

COROLLARIUM III.

583. Unde ſi duo flumina in unum confluant; coniuncta (582) habebunt minorem fundi declivitatem, quam ſeparata.

COROLLARIUM IV.

584. Et ideo ſi plura flumina confluant ſucceſſive in aliud maius; hoc lineam fundi habebit (583) inſtar polygoni diſpoſitam, cuius latera ſuperiora maiorem ſemper cum horizonte angulum comprehendunt, quam inferiora. Hoc polygonum accipi etiam poteſt ut curva ſuperius cava.

COROLLARIUM V.

585. Verum ſi flumen per aliquem eius tractum eandem ſervet altitudinem aquae vivae, eandemque ſubinde etiam fundi declivitatem; tunc linea eius fundi in parvis diſtantiis erit ſenſibiliter quidem re-

Digitized by Google

cta, ſed abſolute, et in diſtantiis maioribus erit curva *ſpiralis* dicta, cuius nempe tangentes cum rectis a centro terrae ad contactuum puncta ductis, aequales ſemper angulos comprehendunt. Quo magis autem hi anguli ad rectos accedunt, eo magis etiam linea fundi accedet ad circuli circumferentiam, cuius centrum eſt idem cum centro terrae.

Corollarium VI.

586. Quod ſi velocitas aquae fluminis pendeat a ſola alvei declivitate, tunc quamdiu accelerabitur motus aquae, tamdiu augebitur eius vis, et in fundo alvei excavatio. Hinc declivitas fundi (574) minuetur indeſinenter, maiorque erit in illis locis, quae a principio fluminis parum diſtant, et contra minor in aliis remotioribus ab eodem.

Corollarium VII.

587. Uſquedum igitur motus aquae in flumine acceleratur, linea eius fundi eſt curva ſuperius cava, cuius tangentes cum rectis a centro terrae ad contactuum puncta ductis, angulos continent eo maiores, quo puncta haec a principio fluminis magis diſtant.

Corollarium VIII.

588. Ceſſante autem acceleratione, et aqua ad aequabilitatem phyſicam iam redacta, fundus alvei diſponetur in linea, vel ſenſibiliter recta, vel in ſpirali, cuius declivitas ubique eſt uniformis.

PROPOSITIO CXX.

589. *Si flumen tantam habeat aquae vim, ut abſque auxilio declivitatis valeat fundi partes rodere, et ſecum ferre; tandem efficiet ſibi ſtabilem fundum horizontalem.*

Quoniam vis aquae in flumine tanta eſt, ut abſque auxilio declivitatis valeat rodere fundi partes; nulla diminutio declivitatis ſufficiens erit ad corroſionem hanc impediendam. Poſita ergo quavis utcunque exigua declivitate, vis aquae ab excavando fundo alvei non ceſſabit, et ideo flumen denique ſibi efficiet ſtabilem fundum horizontalem.

Corollarium I.

590. Hinc linea fundi erit (585) circuli circumferentia, in qua ſcilicet rectae ex centro terrae ad contactuum puncta ductae, rectos, ſive aequales angulos cum reſpectivis tangentibus comprehendunt. Si tamen haec fundi linea in parva diſtantia accipiatur; eadem velut recta cenſenda erit.

Co-

Digitized by Google

Corollarium II.

591. Et ſi haec vis augeri concipiatur, fiet quidem maior in fundo alvei excavatio, ſed horizontalis poſitio fundi non variabitur.

Corollarium III.

592. Unde horizontalia flumina prope illorum oſtia, per quae in mare effundi ſolent, ut plurimum habent altiorem fundum, quam in aliis tractibus ſuperioribus. Dum enim flumina dilatantur, aquae altitudines minuuntur, et ita illorum celeritates, et vires minores fiunt. Sed horizontalia flumina prope eorum oſtia ut plurimum dilatantur ob reſiſtentiam, quam ſubeunt ab aqua maris, dum in hoc ingredi conantur; ergo amittunt quoque vim neceſſariam ad ſibi excavandum, et conſervandum fundum horizontalem. Hinc niſi aliquo artificio ad arctiores limites reducantur, habebunt ibi altiorem fundum, quam in tractibus ſuperioribus. Non itaque eſt mirandum, ſi fundi fluminum prope mare ut plurimum ſint acclives.

PROPOSITIO CXXI.

593. *Si flumen, quod ex ſe habet vim ſufficientem ad ſibi efficiendum, et conſervandum fundum horizontalem, excipiat aquas alterius fluminis influentis; contingere poteſt, ut vim hanc amittat, et propterea eius fundus aliquam ſibi acquirat declivitatem.*

Flumen ADIE (Fig. 131.) in quo altitudo viva aquae eſt DI, vel AE, vim ex ſe habeat ſufficientem ad ſibi efficiendum, et conſervandum horizontalem fundum EI. Deinde paullulum infra I excipiat aquas alterius fluminis influentis, ob quas ſubinde acquirat altitudinem novam, et quidem rectae DG aequalem. Cum igitur infra I quantitas aquae in flumine aucta ſit, ibi etiam maiori vi rodere debet fundum, qui propterea deprimetur (591) uſque ad horizontale planum GC, inferius ipſo EI. Iam quia tanta eſt (ex hyp.) vis aquae in flumine ADIE, ut poſita quavis declivitate in eius fundo, perpetuo hunc corrodat, multo magis corrodet materiam plani IG perpendicularis ad horizontem, fundusque eius proinde acquiret declivitatem aliquam, ut HG. Atqui vis aquae ob declivitatem hanc novam augeri debet; igitur multo magis quam antea fundum rodet, ac deprimet, ideoque ſi flumen ADIE non obſtante hac nova fundi depreſſione, adhuc idoneam vim haberet ad ſibi efficiendum fundum horizontalem, hic deprimeretur tandem uſque ad MG, ita ut fundi MG, GC in eodem eſſent plano horizontali MC. Sed dum fundus EI deprimitur verſus MG, fluminis ſuperficies AD deprimi quoque debet; haec igitur deprimetur, magiſque

ad planum M G accedet. Sed cum ſuperficies A D aquae A D I E non poſſit deprimi verſus M G, quin pars aliqua altioris aquae D O C G cadat ſupra inferiorem aliam A D I E, huiuſque proinde motum retardet, et vim diminuat; ergo dum fundus E I deprimitur verſus M G, flumen A D I E amittit partem aliquam ſuae vis. Si ergo eius vis reſidua non ſufficiat ad ſibi efficiendum fundum horizontalem M G, neceſſario ipſe declivis erit.

Scholion.

594. Neque haec declivitas cauſa erit, ut horizontalis poſitio fundi in ſuperiori tractu fluminis immutetur. Nam ſi ponamus hanc declivitatem eſſe F G; evidens eſt, quod ipſa conveniente cum recta E I in F, flumen recuperabit in puncto F priſtinam altitudinem vivam K F, vel A E, atque adeo ſupra F habebit vim ſufficientem ad conſervandum ſibi fundum horizontalem E F.

Propositio CXXII.

595. *Manente eadem vi aquae in alveo progredientis, quo maior erit tenacitas materiae, ex qua componitur idem alveus, eo maior quoque erit declivitas eius fundi.*

Quoniam vis aquae, quae rodit alveum, eſt eadem (ex hyp.), quo maior erit tenacitas materiae, ex qua alveus coaleſcit, eo minor viciſſim erit eiuſdem alvei excavatio. Sed quanto minor eſt alvei excavatio, tanto maior viciſſim eſt (574) declivitas eius fundi; ergo quo maior erit tenacitas materiae, ex qua alveus conſtat, eo maior quoque erit declivitas eius fundi.

Corollarium I.

596. Ergo flumina, quae habent alveum argillaceum, habebunt quoque fundos decliviores, quam quae in arenoſo, aut limoſo alveo promoventur.

Corollarium II.

597. Et ſi materia, ex qua alveus conſtat, diverſam in variis locis habeat tenacitatem, diverſas quoque in iiſdem locis habebit fundus declivitates, et quidem eiſdem (595) tenacitatibus proportionales.

Corollarium III.

598. Unde ubi materia fundi eſt arenoſa, ibi etiam maiores in eo fient excavationes; contra autem minores, ubi eſt argilloſa. Neque

Digitized by Google

que alia ex cauſa oriri ſolent illae inaequalitates, quae paſſim in fundis fluminum obſervantur.

PROPOSITIO CXXIII.

599. *Iiſdem poſitis, ſi fundus fluminis ſit compoſitus ex craſſioribus materiae partibus ſeparatis, uti ſunt lapides, et arenae; tunc quo maior erit ſpecifica gravitas earundem, eo maior quoque erit declivitas eius fundi.*

Quanto maior eſt gravitas ſpecifica materiae partium, quae mutuo ſeparatae componunt fundum, tanto difficilius ipſae poſſunt a data vi aquae iuxta curſum fluminis promoveri. Verum dum hae expelluntur e locis ſuis, excavatur, atque deprimitur eius fundus; ergo quo maior eſt gravitas ſpecifica materiae partium, quae mutuo ſeparatae componunt fundum, eo difficilius hic excavatur, deprimiturque. Sed quanto minor eſt excavatio fundi, tanto maior viciſſim eſt (574) eiuſdem declivitas; ergo quo maior erit ſpecifica gravitas materiae partium quae ſeparatae componunt fundum, eo maior quoque erit huius declivitas.

Corollarium I.

600. Quia flumina, dum intra montes progrediuntur, fundos habent compoſitos ex lapidibus; ibi quoque habere debent declivitatem maiorem, quam in planitie, in qua fundi ex ſolis arenis conſtant. Similiter in illis locis, in quibus fundi ſunt arenoſi, declivitates perpetuo ſunt maiores, quam ubi compoſiti ſunt ex limo.

Corollarium II.

601. Cum flumina in ſuperioribus tractibus ſui curſus ut plurimum fundum habeant lapidibus magnis ſtratum, qui poſtea ſucceſſive eo minores fiunt, quo ab origine fluminum magis diſtant; ſequitur, flumina in glareoſis locis progredientia, lineam fundi habere ſuperius cavam, quae pro maiori diſtantia ab origine eorundem, minores ſemper cum recta horizontali angulos comprehendit.

Corollarium III.

602. Liquet ſimiliter, quod ſi flumen poſtquam intra montes, et ſupra fundum compoſitum ex lapidibus ſe evolverit, ad planitiem denique reducatur, ibique rurſus intra arenoſum, et limoſum alveum progrediendo, in mare influat, quin in itinere ſuo excipiat aquas alterius fluminis influentis; tunc linea eius fundi partim ſuperius concava erit, et partim convexa. Quamdiu enim flumen in

gla-

Digitized by Google

glareoſo, aut argilloſo alveo promovetur, ſuperius concava ſemper erit; dum vero in arenoſo, aut limoſo progreditur, erit convexa.

PROPOSITIO CXXIV.

603. *Si flumen praeciſe habeat vim ſufficientem ad revolvendum lapidem datae molis ſupra eius fundi aſperitates; non poterit quoque alium lapidem priori ſimilem, et homogeneum, ſed maioris molis, aut ponderis promovere.*

Sint duo lapides ſphaerici A, et B (Fig. 132.) ex eadem materia compoſiti, et diameter primi A ſit pedum 2, diameter autem ſecundi B pedis 1; eritque ſuperficies globi A quadruplo maior altera globi B, ſed pondus illius octuplo maius erit quam huius pondus. Nunc finge hos duos globos incumbere fundo ſcabro, et inclinato CE fluminis alicuius, in quo tanta ſit aquae vis, ut praeciſe valeat promovere ſupra eundem fundum globum minorem B. Dico, hanc vim omnino imparem eſſe promovendo alteri globo A. Vis enim aquae ſollicitans globum A, eſt ad illam, quae impellit alium globum B, ut numerus filamentorum aquae impingentium in globum A, ad numerum illorum, qui urgent alium globum B, ſive ut ſuperficies globi A ad ſuperficiem globi B, ſive (ex demonſt.) ut 4 ad 1. Unde vis aquae ſollicitans globum A, erit quadrupla illius, quae urget alium globum B. Sed pondus globi A eſt octuplum ponderis globi B; igitur aquae vires, quibus globi A, et B urgentur, minus creſcunt quam pondera, aut reſiſtentiae eorundem. Sed vis aquae ſollicitans globum B, praeciſe ſufficiens eſt ad promovendum globum minorem B; ergo vis aquae impellens alium globum A, impar omnino erit promovendo eidem globo, niſi vis minor aquae maiori fundi declivitate compenſetur.

SCHOLION.

604. Et ſane, aucta fundi declivitate, ob duplicem cauſam aqua facilius promovebit maiorem lapidem ſupra fundum. Non ſolum enim ob auctam fundi declivitatem, vis aquae impellens lapidem maior fit; ſed etiam lapis minus attolli debet ſupra horizontem, ut poſſit fundi ſcabritiem ſuperare.

COROLLARIUM.

605. Et ideo flumina in glareoſis locis progredientia, quo minorem habent fundi declivitatem, eo minores etiam lapides ſecum ferunt.

CA-

Digitized by Google

CAPUT XIV.

De modo, quo ſolet flumen convenientem efficere ſibi alveum per depoſitionem materiae extraneae in eius fundo.

DEFINITIO XVII.

606. MAteria aquae *extranea* illa dicitur, quae etſi non ingrediatur eius compoſitionem, una cum ipſa tamen in eodem alveo promovetur.

SCHOLION I.

607. Quando haec materia extranea ita aquae particulis ſe immiſcet, ut cum illa ferme conſtituat unam maſſam; tunc ſolet etiam eſſe cauſa, ut perturbetur aquae denſitas uniformis, et ideo aqua fiat lumini impervia, turbida, et opaca.

SCHOLION II.

608. Materiae extraneae, quas flumina ſecum ferunt, ad tres ſpecies reducuntur. Prima ſpecies eſt illarum, quae ſunt in ſpecie multo graviores aqua, uti ſunt lapides, et arenae craſſiores, et ideo impulſae ab huius vi, in altum non evehuntur, ſed ſolum radentes fundum, vel ferri ſolent lateraliter ripas verſus, vel iuxta fluminis directionem, vel tandem in loco aliquo accumulantur. Unde oritur conſtans illa mutabilitas alveorum in fluminibus illis, quae ſupra fundum refertum glarea progrediuntur. Secunda ſpecies comprehendit materias illas, quae ſunt aqua ſpecifice leviores, atque adeo ipſi innatant, et ſolum iuxta curſum fluminis transferuntur. Tertia tandem ſpecies eſt illarum materierum, quae ſunt nonnihil graviores aqua, ac proinde ab huius impulſu, et agitatione extolluntur a fundo uſque ad fluminis ſuperficiem. Huiuſmodi ſunt arenae ſubtiliores, et terreſtres aliae particulae, quae ab aquae velocitate, atque agitatione in altum evectae, atque ſuſpenſae, illius particulis ſe permiſcent, unamque ferme cum illis maſſam componunt. Quamvis autem velocitas, et agitatio aquae praecipuae cauſae ſint, cur ſubtiliores terrae particulae ab aqua ſuſtineantur; ad hoc tamen etiam concurrit tum exiguum earum pondus, tum etiam figura, et ſuperficies, ob quas ipſae idoneae minus fiunt ad ſuperandam inferiorem particularum aquae tenacitatem. Quare manente hac aquae agitatione, materiae in illa ſemper ſuſpenſae manent;

Digitized by Google

ſed ſtatim ac aquae agitatio diminuitur, ipſae a proprio pondere animatae deorſum cadunt.

SCHOLION III.

609. Difficillimum eſt determinare gradum velocitatis, et agitationis, qui per ſe ſufficiens ſit ad materiam extraneam, et contentam in dato flumine ſuſtinendam. Nam quo maior eſt gravitas huius materiae, et quo maior eſt pariter eius quantitas, eo maiori quoque eſt opus velocitate, et agitatione, ut ſuſpenſa in flumine conſervetur. Unde illa agitatio aquae, quae ſufficiens per ſe eſt ad aliquot materiae particulas ſuſtinendas, non poterit ſimiliter ſuſtinere maiorem copiam earundem, niſi et ipſa quoque agitatio aquae proportionaliter augeatur.

PROPOSITIO CXXV.

610. *Si flumen materias etherogeneas eius aquae permixtas habens, velocitatem paullatim, ac per quoſdam veluti gradus amittat; primum deponet in eius fundo materias ſpecifice graviores, et poſtea leviores.*

Quia materiae extraneae elatio, atque ſuſpenſio (608) ab aquae velocitate, et agitatione procedit; utique quo maior erit ſpecifica gravitas materiae extraneae, quae aquae fluminis ſe permiſcet, eo maiori opus erit (609) aquae velocitate, et agitatione, ut ipſa in altum evehi, et ibi etiam ſuſpenſa manere pergat. Igitur ſi velocitas, atque ita etiam agitatio aquae paullatim, ac velut per gradus quoſdam diminuatur; primo deorſum cadent materiae graviores, utpote indigentes maiori aquae agitatione, ut in eadem ſuſpenſae manere poſſint; deinde vero minus graves, adeo ut quae pauxillum ſunt aqua ſpecifice graviores, ſint quoque tardiſſimae omnium ad deſcenſum.

PROPOSITIO CXXVI.

611. *Contingere poteſt, ut in aliquo loco fluminis aquas turbidas deferentis, nulla materia extranea deorſum cadat, in altero autem plurima deponatur in eius fundo.*

Velocitas aquae fluminis ortum ducit (511) vel ab altitudine viva aquae, vel a fundi declivitate. Atqui tam altitudo viva aquae, quam declivitas fundi in diverſis locis eiuſdem fluminis eſt diverſa; ergo et velocitas aquae in diverſis locis eiuſdem fluminis

va-

Digitized by Google

varia erit. Quare aliqua aquae pars eſſe poterit ita velox, ut graviores, et craſſiores materias ſuſpenſas teneat, dum reliqua e contrario impar omnino eſt etiam levioribus, et ſubtilioribus ſuſtinendis. Propterea primo in loco nulla materia extranea deorſum cadet, in altero autem plurima deponetur in eius fundo.

COROLLARIUM.

612. Quia maxima eſt (478) velocitas fluminis in eius filo, et minima prope ripas; conſequens eſt (611), ut vel nihil, vel parum materiae extraneae ſub filo fluminis deponatur, et multum prope ripas. Quapropter flumina recta, in quibus ſcilicet filum aquae aequaliter diſtat ab eius ripis, fundum habent in medio profundiorem, quam prope ripas. Oppoſitum autem ſuccedit in fluminibus curvilineis, cum haec habeant aquae filum prope ripam concavam conſtitutum.

PROPOSITIO CXXVII.

613. *Si ſectio fluminis recti quoad longitudinem, et latitudinem ſtabilis ſupponatur, eiuſque figura ſit parallelogrammum rectangulum, adeo ut eius ripae inſiſtant ad rectos angulos horizonti; eadem ſectio non mutabitur a vi aquae, quamdiu haec pura, et clara erit. At ſi turbida inde evadat; tunc nedum fundus fluminis deprimetur in eius medio, et ad latera attolletur, ſed etiam amplitudo ſupremae eius ſuperficiei maior ſiet.*

I. Finge arte effectum eſſe alveum rectum, cuius fundus ſit planum ita declive, ut a vi currentis aquae nec mutari, nec rodi poſſit. Finge praeterea eius ripas perpendiculares eſſe ad horizontem, et tali compoſitas ex materia, ut in hoc verticali ſitu manere poſſint, habeantque praeciſe ſufficientem vim reſiſtendi alteri vi aquae radentis illas. Finge tandem parallelogrammum rectangulum C B D F (Fig. 133.) eſſe huius fluminis ſectionem. Dico, quod haec non mutabitur, quamdiu aqua per ipſum tranſiens, erit clara. Bifariam enim divide in A, et E rectas C B, F D, quarum prima exponit fluminis ſuperficiem, et altera eius fundum. Pone dein materiam, ex qua alveus coaleſcit, ubique eſſe uniformiter reſiſtentem. Cum itaque aqua tranſiens per hanc ſectionem, fundum ſtabilem F D habeat; hic utique a vi aquae (578) corrodi, aut deprimi prorſus nequit. Sed neque etiam a materia aquae extranea attolletur, cum aqua fluminis (ex hyp.) clara ſit; ergo aqua tranſiens per ſectionem C B D F, eandem ſemper altitudinem vivam E A ſervabit. Demum quia verticales ripae C F, B D ex tali materia compoſitae ſupponun-

 tur,

tur, ut praeciſe reſiſtant vi aquae radentis illas; permanebunt ipſae in locis ſuis. Igitur nullo modo mutabitur ſectio CBDF.

II. At ſi turbida ſit aqua, quae intra alveum promovetur; tunc nedum fundus fluminis deprimetur in eius medio, et ad latera attolletur, ſed etiam amplitudo ſupremae eius ſuperficiei fiet maior. Nam aqua in fundi medio punto E maiorem habere ſolet velocitatem, quam prope ripas, veluti in O, et H; ergo ſi eadem ſupponatur habere in puncto E praeciſe vim ſufficientem ad impediendam depoſitionem materiae eodem in puncto E, utique ſufficientem vim non habebit in puncto H, et multo minus in puncto F, ubi nempe velocitas currentis aquae eſt magis impedita a reſiſtentia ripae CF. Unde inter E, et F materia extranea deponetur, et ita ſectio minor fiet. Sectione autem fluminis diminuta, aquae altitudo in illa augeri debet, ex quo ſequitur neceſſario, ut eius quoque velocitas, et vis creſcat in loco E, atque adeo fiat nova in fundo cavitas uſque ad K, donec ſcilicet ſit vis aquae in aequilibrio cum reſiſtentia fundi in K. Ulterius ob auctam altitudinem ſectionis, velocitas etiam aquae ubique creſcit, et propterea eius vis, quae prius erat in aequilibrio cum reſiſtentia riparum CF, BD, nunc maior effecta ob acquiſitum novum gradum velocitatis, rodere debebit ripas, quae propterea delabentur, et obtinebunt poſitiones GH, IO ita declives, ut earum reſiſtentiae aequilibrentur cum aquae viribus ita auctis. Id autem fieri prorſus nequit, niſi etiam ſuperficies CB aquae dilatetur uſque ad G, et I; ergo ſi turbida fuerit aqua, quae intra alveum promovetur, non ſolum fundus fluminis deprimetur in eius medio, et ad latera attolletur, ſed etiam amplitudo ſupremae eius ſuperficiei fiet maior.

Corollarium I.

614. Hinc fundus fluminis recti profundior erit in eius medio, quam ad latera, aut ripas verſus, et ideo ibi erit velocitas aquae maxima, aut (378) filum fluminis.

Corollarium II.

615. Et propterea vel conſtabit ex duobus planis verſus eius medium inclinatis, aut ex concava ſuperficie, verticem habente in eius medio.

PROPOSITIO CXXVIII.

616. *Si alveus recti fluminis ſit compoſitus ex materia inaequaliter reſiſtenti; ibi excavabitur eius fundus, ubi reſiſtentia materiae erit minor, et e contrario attolletur, ubi reſiſtentia materiae maior erit,*

Sit

Sit BKIDNOA (Fig. 134.) ſectio recti fluminis, alveum habentis compoſitum ex materia inaequaliter reſiſtenti. Sit autem reſiſtentia maior in parte KID, et minor in parte altera DNO. Dico, quod deprimetur pars fundi DNO, et contra attolletur altera KID. Finge enim alveum eſſe factum vel per excavationem, vel per materiae extraneae depoſitionem, et vim aquae in eo progredientis, tum eandem omnino eſſe in partibus KID, DNO, tum praeciſe idoneam etiam eſſe ad impediendam depoſitionem materiae in eius fundo. Finge rurſus vim aquae currentis in KID eſſe in aequilibrio cum reſiſtentia fundi in KID. His poſitis, ita obſtenditur propoſitio. Vis aquae eadem eſt (ex hyp.) in partibus KID, DNO, at reſiſtentia in KID eſt maior quam in DNO. Sed vis aquae in KID eſt (ex hyp.) in aequilibrio cum reſiſtentia in KID; ergo vis aquae in DNO erit maior quam reſiſtentia in DNO, et ideo in hac parte corroſio fiet, et conſequenter aquae profunditas augebitur. Sed aucta aquae altitudine in DNO, ſimul etiam eius velocitas, et vis creſcet; igitur ibi aqua maiori vi rodere fundum perget. Pone nunc, quod vi aquae facta ſit cavitas DFO, ita ut ibi nova altitudo aquae ſit GF; igitur ſectio BKIDNOA aucta fuit magnitudine DFO, et ideo quantum crevit altitudo, et vis aquae in DFO, tantundem minuetur in KID. Vis autem, quam prius habebat aqua in KID, praeciſe ſufficiens erat ad impediendam depoſitionem materiae in KID; ergo haec minor facta in KID, impar omnino erit huic effectui producendo. Quare pars fundi KID attolletur uſque ad KMD, et nova ſectio fluminis erit BKMDFOA.

Corollarium I.

617. Cum maxima aquae velocitas, atque adeo (378) filum fluminis ſit (*616*) proximum ripae AO; haec neceſſario corrodetur, et e contrario in locis proximis ripae BK, materia terrea deponetur, et alluvio fiet.

Corollarium II.

618. Hinc alveus convexus fiet in KMD, et concavus in OFD, proindeque flumen, quod rectum prius erat, in curvilineum convertetur.

Scholion.

619. Ex his omnibus ſatis patet, tales dari poſſe in flumine mutationes, ut hoc alveum ſuum mutet. Id vero eveniet quando aqua ita ripam in aliquo loco rodit, ut aperiat ſibi viam ad loca

alia

Digitized by Google

alia depreſſiora. A velocitate autem, qua aqua in viam hanc penetrabit, pendebit antiqui alvei fatum.

PROPOSITIO CXXIX.

620. *Si turbidum flumen influat in paludem; ipſum intra proprias alluviones novum alveum ſibi efficiet ſecundum viam, quae determinabitur ab eius ultima directione, ab impedimentis exiſtentibus in palude, et a ſitu emiſſarii, per quod ex hac erumpit.*

I. Flumen turbidum ABCD (Fig. 135.) per oſtium BC influat in paludem CGEFB, cuius emiſſarium poſitum ſit in E, et ultima directio fluminis ſit HC. Dico, tres cauſas concurrere ad determinandam viam fluminis ex C ad E, quarum prima eſt ultima eius directio HC; ſecunda eſt reſiſtentia ab aqua fluminis ſuperanda, dum progreditur in palude; tertia denique eſt poſitio emiſſarii eius E. Cum fluminis aqua in ultimo tractu HC velocitatem aliquam habere debeat, eiuſque praeterea altitudo in H vel aequalis, vel maior ſit, quam in C; motu utique actuali nitetur ingredi in paludem. Sed ex adverſo paludis aqua in loco C ipſi reſiſtit ſolum ſimplici conatu ad motum; igitur aqua fluminis ABCD per oſtium BC in paludem ingredietur, impetuque inde concepto, per aliquod ſaltem ſpatium curſum ſuum intra illam continuabit in recta linea HCS. Cum vero aqua praetergreſſa oſtium BC, non amplius a ripis, uti prius, coerceatur; vi propriae fluiditatis lateraliter diffundetur, veluti ad N, et M, atque ſic diminuta altitudine aquae currentis ex C ad S, ſenſim eius velocitas minuetur, uſquedum ad quietem ſenſibilem reducatur, quae quidem in N, et M citius quam alibi ſequi debebit. Finge nunc aquam progredientem iuxta CS, motum omnem amittere in puncto S; ergo turbida aqua fluminis poſtquam pervenerit uſque ad S, ſenſibiliter ſtagnans ubique erit, unica illa excepta, quae replet ſpatium BCSK. Cum itaque currat aqua in BCSK, et ſit immota in N, et M, maiores hic, quam ibi fient materiae extraneae depoſitiones, quae altitudine ſua claudent ſpatium BCSK, intra quod aqua veluti per principium novi alvei progredietur. Cum vero poſtea ob ſequentes alias materiae extraneae depoſitiones, ita paullatim attolli debeant eius ripae BK, CS, ut tandem aſſurgant ſupra paludis aquam; ideo ipſae cogere debent flumen ad curſum ſuum in novo alveo continuandum, et ad eius oſtium etiam protrahendum ſecundum rectam lineam HCS. Quare directio novi alvei efficiendi intra paludem, pendet a directione HC, quam in ipſomet oſtio habet flumen.

II. At ſi aliqua eſſent obſtacula in palude, non amplius novum flumen curſum ſuum continuaret ſecundum viam ab eius directione ulti-

Digitized by Google

ultima indicatam. Finge enim intra paludem C G E F B virgultis ubique plenam, aliquo artificio patefactam fuiſſe viam aliquam, ut C P. Hoc poſito, ſtatim ac aqua fluminis ingreſſa fuerit in paludem, nitetur quidem curſum ſuum protrahere iuxta rectam lineam H C S; ſed brevi dein amiſſo motu, ob reſiſtentias perpetuas in quas incurrit, cogetur aſſumere viam C P, utpote nullis obſtaculis impeditam. Atque hinc ratio patet, cur flumina, quae proprias aquas deferunt in paludem, frequenter in plures rivulos dividantur.

III. Directio novi alvei etiam pendet ab emiſſarii poſitione, per quod aqua egreditur ex palude. Nam ſi concipias in palude nullum aliud eſſe emiſſarium praeter E; omnis aqua, quae poſtquam tranſivit a flumine in paludem, ſtagnans effecta fuit, habebit curſum notabilem verſus E. Similiter cum flumen, quod ob repetitas alluviones paullatim alveum ſibi efficit in palude, nequeat ex hac egredi quam per E; idem (etſi totam paludem antea circumiret) eo tandem perveniet, ubi prior alter incipit curſus aquae verſus emiſſarium E, et ideo novo curſu compoſito ex his duobus, tandem ad E ſe conferat opportebit.

Corollarium.

621. Hinc ratio reddi poteſt, cur flumen, quod in palude convenientem alveum ſibi effecit, ut plurimum eſſe ſoleat curvilineum. Varii enim eiuſdem flexus partim procedunt (620) a directione, quam habet aqua dum ingreditur in paludem, partim a reſiſtentiis, quibus in hac occurrit, et partim a ſitu emiſſarii, per quod egreditur ex palude.

PROPOSITIO CXXX.

622. *Si flumen progrediens ſupra fundum compoſitum ex craſſioribus materiae partibus ſeparatis, quae multum reſiſtant excavationi, longo tempore opus habeat ad ſibi fundum ſtabilem excavandum, et priuſquam hunc abſolvat, in eius alveum introducatur materia extranea eiuſdem indolis, ac naturae cum illa, ex qua componitur idem fundus; nunquam poterit excavando, efficere ſibi fundum vi eius aquae, et reſiſtentiae materiae convenientem.*

Fundus A B (Fig. 136.) ſit ille, quem tandem flumen ope excavationis ſtabilem ſibi efficeret, ſi nulla materia extranea in ipſum ingrederetur. Tum intelligatur incumbere huic fundo triangulum A O B ex eadem materia conſtans, ex qua componitur idem fundus. Dico, quod fundus fluminis nunquam perveniet ad A B. Cum enim aqua ſufficientem vim habeat corrodendi materiam fundi, qui eſt declivior quam A B, utique etiam debebit rodere, et ſecum ferre ma-

materiam illam, ex qua conſtat triangulum A O B. Sed cum haec excavatio inſtantanea eſſe nequeat, ſed (ex hyp.) longo ſolum tempore perficiatur, ponamus poſt illud tempus, quo per excavationem abiret fundus ex O B in D B, tantam materiae extraneae quantitatem a torrente aliquo transferri in flumen, quanta praeciſe eſt neceſſaria ad implendum triangulum D O B, ſive ad attollendum fundum ex D B in O B. Cum ergo vis aquae, et reſiſtentia materiae in fundo O B ſint eaedem quae prius, fiet equidem in hoc fundo nova altera excavatio, quae eundem reducet iterum ad DB. Sed poſtquam haec cavitas facta erit, materia extranea, quae rurſus transferetur in alveum a torrente, praeciſe replebit (ex hyp.) triangulum D O B; igitur eius fundus reſtituetur denuo in O B. Id vero etiam debet ſucceſſivis temporibus evenire; igitur nunquam fundus perveniet ad A B.

Corollarium I.

623. Hinc ſi D B ſit illa declivitas, ad quam poteſt excavatio pervenire durante maximo illo temporis intervallo, quod intercedit inter unam, et aliam materiae introductionem; tunc fundus alvei per excavationem nunquam perveniet ad A B, ſed ad ſummum uſque ad D B. Similiter ſi O B ſit maxima altitudo, ad quam ſemotis impedimentis, poteſt aſſurgere fundus alvei ob materiam extraneam in eundem alveum introductam; nunquam ipſe declivitatem O B praetergredietur. Quare ſtabilis fuudus alvei cenſendus erit ut poſitus inter declivitates O B, et D B.

Corollarium II.

624. Quia craſſiores materiae ſolent in flumina introduci a torrentibus in eorum praecipue eluvionibus; conſequens eſt, ut quo longiora ſunt temporis intervalla inter unam, et aliam torrentium eluvionem, eo minorem quoque habeat fundus declivitatem.

Corollarium III.

625. Et quoniam torrentium eluviones quanto magis ſunt turgidae, et diuturnae, tanto maiorem quoque materiae extraneae quantitatem in flumina introducunt; ideo quanto maiores, et diuturniores erunt torrentium eluviones, tanto maiorem quoque habebit fundus fluminis declivitatem.

Corollarium IV.

626. Rurſus quia quo turgidior, et diuturnior eſt eluvio fluminis alicuius, ipſum eo maiori vi, et longiori temporis intervallo excavat eius fundum; ſequitur, quo turgidior, et diuturnior erit eluvio fluminis, eo minus declivem fore illius fundum.

Co-

Digitized by Google

Corollarium V.

627. Cum itaque eluvio fluminis tam in magnitudine, quam in temporis diuturnitate ab ipſis torrentium eluvionibus oriatur, et prima efficiat (626) minorem fundi declivitatem, ſecundae vero (625) maiorem gignant; liquet a nobis non poſſe determinari, an declivitas fundi ſit per fluminis eluvionem augenda, aut minuenda, niſi antea dignoſcatur quaenam ex hiſce duabus cauſis alteri ſit praepollens.

PROPOSITIO CXXXI.

628. *Si flumen, quod ſibi fundum ſtabilem iam effecit, turbidas dein torrentis aquas in ſe recipiat, nec habeat vim idoneam ad particulas terreas, quas ab eodem torrente excipit, ſuſtinendas; initio quidem hae deponentur in eius fundo, ſed poſtea ceſſante turbidae aquae influxu, iterum idem fundus ad declivitatem priſtinam reducetur.*

Pone flumen antequam turbidas torrentis aquas in ſe recipiat, vi eius aquae ſibi fundum A B (Fig. 136.) ſtabilem effeciſſe. Pone dein a turbidis torrentis aquis in fundo A B deponi tantam materiae terreae quantitatem, quanta praeciſe eſt neceſſaria ad implendum triangulum A D B, adeo ut fundus tranſeat ex A B in B D. Hoc poſito, ſtatim ac torrens non amplius in flumen aquas turbidas introducit, eadem aquae maſſa, quae antea deſcendebat ſuper plano parum declivi A B, tunc delabetur ſupra magis declive D B; ideoque vis aquae currentis in plano D B, erit maior quam vis eiuſdem progredientis in plano A B. Sed vis aquae currentis in plano A B erat (ex hyp.) in aequilibrio cum reſiſtentia terrae in plano A B; igitur vis eiuſdem progredientis in plano D B, praevalebit reſiſtentiae terrae in plano D B, conſequenter rodetur maſſa trianguli A D B, ſicque fundus reſtituetur ad priórem declivitatem A B.

Scholion.

629. Ut autem id praeſtet flumen, brevi ſolum tempore opus habet. Cum enim maſſa terrea A D B ex particulis terrae conſtet in fundum A B delapſis, quae utpote madefactae ſunt parum invicem cohaerentes; utique ipſa parum reſiſtet aquae currentis vi, et ideo brevi etiam tempore corrodetur.

PROPOSITIO CXXXII.

630. *Si flumen, quod fundum ſtabilem ſibi effecerat, turbidas dein torrentis aquas in ſe recipiat, nec vis idonea ipſi deſit ad particulas terreas, quas a torrente excipit, ſuſtinendas; eius fundi declivitas minuetur.*

Sit DB (Fig. 136.) ſtabilis fundus, quem flumen antequam exciperet torrentis aquas, ſibi effecit. Quamvis aqua, quae in flumine promovetur, particulis terreis ſit permixta; non tamen deſinit eſſe fluida, unde manente eadem altitudine aquae vivae in data fluminis ſectione, eadem quoque erit eius velocitas, atque vis, ſive aqua ſit turbida, ſive clara. Sed aucta altitudine aquae clarae in flumine decurrentis, creſcit ſimiliter eius vis, qua conatur rodere eius fundum; ergo ſi quoque in flumine augeatur aquae turbidae altitudo, ipſa etiam maiori vi nitetur rodere eius fundum. Sed poſtquam flumen turbidas torrentis aquas in ſe recepit, eius altitudo pariter aucta fuit; ergo et eius fundum conabitur excavare maiori vi, quam cum ſolum proprias aquas ferret. Atqui tunc eius vis erat in aequilibrio cum reſiſtentia ſtabilis fundi DB; ergo poſtquam turbidas torrentis aquas in ſe recepit, vis aquae praevalebit reſiſtentiae huius fundi, conſequenter hunc excavabit, atque reducet (574) ad minorem declivitatem, ut AB.

PROPOSITIO CXXXIII.

631. *Flumen inclinatum, habenſque fundum ſtabilem in AB (Fig. 337.), vim habeat praeciſe ſufficientem ad ferendas turbidas aquas uſque ad mare. Dein ob alluviones in ora maritima inde ortas, cogatur terminum eius B protrahere uſque ad D. Dico, quod eius fundus continuo attolletur, donec acquirat declivitatem CD, priori AB aequalem, aut parallelam.*

Quoniam aqua currens ſupra fundum declivem AB, habebat (ex hyp.) vim praeciſe ſufficientem ad terrae particulas ſuſtinendas; utique illas nequibit poſtea ſuſtinere, dum ſupra fundum horizontalem BD incedet, unde ipſae cadendo in eius fundum, hunc paullatim attollent, atque ad poſitionem inclinatam ad horizontem, velut ED, reducent. Rurſus cum fundus ED minus declivis ſit, quam AB; ne aqua quidem ſupra ED incedens, idoneam vim habebit ad particulas terreas ſuſtinendas, quare fundus ED pariter ſe extollet, veluti in AD, et ſic deinceps. Fundi itaque elatio non ceſſabit, donec uſque ad originem fluminis ſit protracta, ſive donec li-

nea

nea novi ſundi rurſus acquirat declivitatem C D, priori A B aequalem, aut parallelum.

Scholion I.

632. At ſi flumen ſtabilem fundum habeat in horizontali recta aliqua, ut HB, ſuperque illum ita incedat, ut uſque ad mare deferat eius limum; tunc etiamſi terminus eius B protrahatur uſque ad D, nulla in eo tamen depoſitio limi ſequi debebit. Cum enim flumen declivitatem, quam non habet, nullo modo mutare queat; ipſum cum eadem adhuc velocitate moveri perget, cum qua antea ferebatur. Sed dum terminus eius erat in B, nulla fiebat depoſitio limi in eius fundo; ergo neque eadem ſequi debebit, etiamſi terminus eius B protrahatur uſque ad D.

Scholion II.

633. Si autem acciderit, ut dum terminus B fundi inclinati AB protrahitur uſque ad D, nova aquae copia in flumen introducatur, ob quam vis eius aucta, impediat ne terreſtres particulae deponantur in fundo minus declivi AD; tunc prior fundi linea IAB abibit in minus declivem alteram FAD. Imo quia copia maior aquae profundius oſtium exigit; utique ſi ponamus hoc deprimi ex D in O, tunc nova fundi linea diſponetur in recta PO, parallela ad FAD, quae nedum erit minus declivis quam IAB, verum etiam depreſſior iſta erit.

Scholion III.

634. Denique ſi flumen, in quo aucta fuit quantitas aquae, ac proinde etiam velocitas, et vis eius, ſtabilem fundum habeat in horizontali recta HB; idem poſt protractionem fundi ex B in D, et depreſſionem oſtii ex D in O, ſibi fundum ſtabilem efficiet (591) ſuper horizontalem aliam rectam GO, inferiorem ſcilicet prima HD.

Digitized by Google

CAPUT XV.

De mutationibus, quae in fundo fluminis producuntur, ob ipſi oppoſitam cataractam.

DEFINITIO XVIII.

635. Cataracta eſt obſtaculum, quod fluminis curſui eſt oppoſitum, et quidem protenſum ab una uſque ad alteram eius ripam.

SCHOLION I.

636. Opponitur flumini cataracta, ut fundus alvei ſuperioris altior conſervetur quam fuiſſet, ſi haec abeſſet; unde impedit corroſiones, quae alioquin a rapidiori curſu fluminis gignerentur. Saepe etiam cataracta flumini applicatur, ut aqua, quae ab ipſo deducitur in canalem, tantam acquirat celeritatem, quanta nempe eſt neceſſaria ad piſtrini, aut alterius aedificii rotas circumagendas.

SCHOLION II.

637. Ob varias cauſas varii pariter eſſe ſolent motus aquae properantis ad cataractam. Imprimis enim ſi directio cataractae ſit perpendicularis ad curſum fluminis cui opponitur; aqua moveri perget in eodem plano verticali, in quo antea ferebatur. At ſi directio cataractae obliqua ſit ad fluminis directionem; tunc aqua movebitur iuxta rectam inclinatam ad illam partem, verſus quam curſus aquae cum cataracta obtuſum angulum comprehendit. Diverſi quoque ſolent fieri aquae motus propter figuram variam cataractae. Quando enim haec ita eſt perpendicularis ad horizontem, ut aqua eius faſtigium praetergreſſa, non amplius ipſam tangat; tunc ſingulae eius guttae e faſtigio cataractae ſe praecipites deiicientes, deſcribent curvam, quae ſepoſitis reſiſtentiis, erit parabola apoloniana. Quod ſi contingat, ut immediate poſt cataractam appoſitum ſit planum aliquod inclinatum, et quidem protenſum uſque ad faſtigium cataractae; hoc in caſu ſingulae aquae guttae poſt hoc faſtigium ſuperatum, rectilineo ferri debebunt motu, et quidem parallelo ad idem planum.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO CXXXIV.

638. *Si flumen, cui cataracta obiecta fuit, aliam cauſam non haberet ſuae velocitatis praeter eius fundi declivitatem; hic ob materiae extraneae depoſitionem, eveheretur uſque ad faſtigium cataractae, adeo ut novus fundus ſtabilis inde ortus, evaderet tandem veteri parallelus, et hunc veterem quoque fundum declivitate, et flexu omni imitaretur.*

Sit AB (Fig. 138) ſtabilis fundus fluminis, et BC eidem oppoſita cataracta; flumen autem non habeat aliam cauſam ſuae velocitatis, quam declivitatem eius fundi AB, ſuper quo deſcendit uſque ad cataractam. Dico, hunc ipſum fundum evehendum eſſe uſque ad faſtigium cataractae, adeo ut novus fundus ſtabilis inde ortus, evadat tandem veteri parallelus. Ducta enim per cataractae faſtigium C horizontali recta CE, quae fundo AB occurrat in puncto G, agatur CF parallela eidem fundo. Quia antequam flumini cataracta obiiceretur, fundus AB ſtabilis ponebatur, aqua ſupra illum cadens, tali erat praedita velocitate, ut vim haberet praeciſe ſufficientem ad ſecum rapiendum quidquid terrae, aut ponderoſioris materiae ſibi admixtum habet. Sed cataracta BC obiecta, velocitas aquae progredientis ſupra fundi tractum GB, ſubito diminuitur, quippe ob aquam, quae initio fit ſtagnans in cavo GCB, omnes fluminis ſectiones factae in tractu GB, manifeſte ſunt impeditae; igitur huic aquae deerit vis idonea ad ponderoſiorem materiam, uti antea, transferendam. Haec ergo in fundum GB delapſa, implebit primo cavum integrum GBC, et fundum GB reducet ad poſitionem horizontalem GC. Iam quia nunc aqua tranſit a plano declivi AG in horizontale GC; vis eius in plano GC, valde minor erit quam illa, quam habet in altero plano AG. Atqui vis aquae currentis in plano AG, praeciſe ſufficiens eſt (ex hyp.) ad ſuſtinendam materiam, quam ſibi admixtam habet; ergo vis aquae progredientis in plano GC, impar omnino erit huic materiae ſuſtinendae, quae proinde ad fundum GC delapſa, eundem uſque ad OC attollet. Rurſus cum planum OC minus declive ſit quam AO, etiam aqua currens in plano OC, vim minorem habebit quam dum labitur per AO; ergo in hoc quoque plano OC materia terrea deponetur, ideoque hic etiam fundus uſque ad EC denuo attolletur. Simili modo oſtendam, quod flumen per totum alveum ſuperiorem aliam, atque aliam deiiciet ſemper materiam in eius fundum, neque ab hac deponenda unquam ceſſabit, uſquedum fluminis novus fundus adeptus fuerit poſitionem FC parallelam veteri fundo AB; hac ſiquidem acquiſita, ſuam velocita-

tem

tem acquiret flumen, cui cataracta obiecta fuit, et admixtam ſibi materiam ſecum feret. Si ergo flumen, cui apponitur cataracta, aliam cauſam non haberet ſuae velocitatis quam fundi declivitatem; hic ob materiae extraneae depoſitionem attolleretur usque ad faſtigium cataractae; adeo ut novus fundus ſtabilis inde ortus, fieret tandem veteri parallelus, et hunc veterem ipſum fundum declivitate, et flexu omni imitaretur.

PROPOSITIO CXXXV.

639. *Sive flumen libere ſe deiiciens ex faſtigio cataractae, deſcribat lineam parabolicam, ſive deſcendens per planum inclinatum appoſitum cataractae, motu rectilineo progrediatur; ſemper neceſſe erit, ut antequam perveniat ad faſtigium cataractae, augeat velocitatem, quam propter declivitatem alvei ſuperioris antea acquiſiverat.*

Cum nullum planum inclinatum eſt appoſitum cataractae, aqua ex eius faſtigio ſe deiiciens, non clivo aliquo ſuſtinetur, non fundi, non riparum aſperitatibus retinetur; ſed ab obſtaculis omnibus liberata, ingenio ſuo ruit, et ideo eius motus celerrimus longe fiet. Sed aquae cataractam celerrime tranſeuntes, aliquam cohaeſionem habent cum inſequentibus; ergo hae quoque trahi ab illis debent, atque ad motum ſimilem concitari. Quare antequam aquae ad cataractam perveniant, per breve aliquod ſaltem ſpatium ſuos motus accelerabunt, hoc eſt debebunt fieri celeriores. Hoc ipſum quoque evenit, quando aqua poſt ſuperatum faſtigium cataractae, ſtatim deſcendit per planum aliquod inclinatum. Finge enim hoc planum ſurſum protrahi uſquedum conveniat cum ſuprema fluminis ſuperficie. Hoc poſito, ubi aqua accedens ad cataractam, pervenerit ad ſectionem communem utrique plano, deſcendere incipiet per planum magis declive, et quidem uſque ad cataractam. Sed quando aqua a declivi plano in declivius aliud tranſit, neceſſario auget illam velocitatem, quam in plano antecedenti antea acquiſiverat; ergo antequam aqua perveniat ad cataractam, velocitatem illam augere debet, quam prius ob declivitatem ſuperioris alvei acquiſiverat.

SCHOLION I.

640. Dum libere cadit aqua ex faſtigio cataractae, eius motus accelaratio ſenſibiliter incipit paullo ſupra illam. Iuxta enim Euſtachii Manfredii experimenta, corpora innatantia non accelerant ſenſibiliter ſuos motus, niſi quando ſunt proxima cataractae; unde evidens quoque erit, ſuperficiem ſupremam aquae in locis tantum

pro-

Digitized by Google

proximis cataractae incipere magis quam antea inclinari, hoc eſt ibi ſolum ſenſibile fieri incrementum illud velocitatis, quod altitudinem aquae minuit.

Scholion II.

641. Si tamen fides habenda eſt Barattierio, viro in aquaria re peritiſſimo, locus ubi aquae incipiunt accelerari, magno intervallo etiam diſtat a cataracta. Ipſe enim (a) factis duodecim ſtationibus, accurate deſcripſit Siſterii ſuperficiem per longitudinem ſex miliarium, ſive a Burgo S. Domnini uſque ad cataractam, ex qua eius aqua ſe praecipitem demittebat. Ex hac autem viri doctiſſimi deſcriptione aperte liquet, eiuſdem fluminis ſuperficiem iam multum deprimi ad diſtantiam dimidii miliarii a cataracta. At ſi ita eſſet, acceleratio aquae properantis ad cataractam, ad magnam quoque ab illa diſtantiam ſurſum protenderetur; quamvis differentia velocitatum, quae ab humano oculo diſcerni poteſt in corporibus innatantibus, ſenſibilis tantum fiat in parva diſtantia a cataracta.

Corollarium.

642. Hinc patet duplicem eſſe cauſam velocitatis aquae properantis ad cataractam. Prima eſt declivitas alvei ſuperioris, in quo deſcendit, et altera eſt motus aquae praeeuntis, et cataractam celerrime tranſilientis, quae in ſimilem motum rapit, et allicit inſequentem.

PROPOSITIO CXXXVI.

643. *Quamvis obiecta flumini cataracta in cauſa ſit, ut eius fundus paullatim uſque ad illius faſtigium evebatur; ipſe tamen ad talem formam ſe tandem accommodabit, ut ubique ſit inferior plano ducto per faſtigium cataractae, et ad veterem fundum fluminis parallelo.*

Sit AB (Fig. 139.) ſtabilis fundus fluminis, cui cataracta BC obiecta fuit. Sint quoque plana CK, CH ita ducta per faſtigium cataractae, ut primum ſit parallelum ad horizontem, et alterum ad fundum AB. Dico, quod hic fundus ad talem formam ſe tandem accommodabit, ut ſit ubique inferior plano CH. Si fieri poteſt, fundus AB concipiatur ita evectus eſſe, ut congruat cum CH, et incrementum celeritatis, quod acquirere ſolet aqua accedens ad cataractam, ſenſibile eſſe incipiat in puncto F. Aquae currentes ſupra fundos HF, AB, ſuas velocitates a ſolis horum declivitatibus recognoſcunt. Sed fundi HF, AB ponuntur aeque declives eſſe;

(a) Lib. 6. Cap. 10.

ſe; ergo aquae in illis progredientes habebunt quoque aequales celeritates, atque ita aequalibus etiam viribus nitentur corrodere eorum fundos. Sed hi duo fundi utpote aequaliter inclinati, aequaliter etiam reſiſtunt excavationi; igitur cum vis aquae currentis in fundo A B eſſet in aequilibrio cum reſiſtentia fundi AB, etiam vis aquae promotae in fundo HF, erit in quilibrio cum reſiſtentia fundi HF. His autem poſitis, ita oſtenditur propoſitio. Quia ob cataractae oppoſitionem, aqua velocius fertur in plano FC quam in HF; vis aquae currentis in plano FC, maior erit quam illa, qua eadem aqua fertur in altero plano HF. Sed reſiſtentia fundi eſt eadem in utroque; igitur cum vis aquae currentis in plano HF, ſit (ex dem.) in aequilibrio cum reſiſtentia plani HF, ſequitur vim aquae progredientis in plano FC, maiorem eſſe quam reſiſtentia in plano FC, et ideo aqua planum FC corrodet, uſquedum hoc acquirat poſitionem minus declivem EC, et quidem talem, ut vis aquae currentis in novo hoc plano EC, cum reſiſtentia huius aequilibretur. Rurſus cum planum FE ſit declivius quam HF, aqua cadens in plano FE, vim maiorem habebit, quam quae in plano HF deſcendit. Sed reſiſtentia plani FE eſt (572) minor quam reſiſtentia plani HF; igitur cum vis aquae cadentis in plano HF, ſit in aquilibrio cum reſiſtentia plani HF, conſequens eſt, ut vis aquae deſcendentis in plano FE ſit maior quam reſiſtentia huius plani, quod proinde effodietur, et minus declivem ſitum GE acquiret. Simili modo oſtendam, fore ut denuo excavetur tam hoc planum GE, quam quodlibet aliud ductum ex E ad HG veluti eſt OE; ergo fundus HF continuo excavabitur, donec acquirat poſitionem IE parallelam tum ſibi, tum veteri fundo AB, adeo ut linea novi fundi reducatur tandem ad IEC. Haec autem linea IEC eſt manifeſte inferior ipſa HC, quae parallela eſt veteri fundo AB; ergo quamvis ob obiectam flumini cataractam, eius fundus AB paullatim uſque ad huius faſtigium attollatur, ipſe tamen ad talem formam ſe tandem accommodabit, ut ſit ubique inferior plano ducto per faſtigium cataractae, et ad veterem fundum fluminis parallelo.

Scholion I.

644. Hunc autem fluminis novum fundum neceſſario ſtabilem eſſe oportet. Cum enim pars fundi IE parallela ſit veteri, et ſtabili fundo AB; nihil materiae, quam ſibi aqua admixtam habet, in ea deponi debet. Sed nihil eiuſdem quoque deiiciendum erit in partem alteram fundi EC; nam ſi illa in hac deponeretur, ſubito augeretur declivitas fundi EC, et ideo hic deberet denuo excavari, uſquedum rurſus ad priorem declivitatem EC rediret.

Scho-

Scholion II.

645. Nec dici poteſt, quod producta CE in S, ſit SC quaeſita linea ſtabilis novi fundi. Cum enim SE minus declivis ſit quam IE, vel AB; aqua deſcendens ſupra SE, vim idoneam non habebit ad materiam, quam ſibi admixtam habet, uſque ad E ferendam.

Corollarium I.

646. Si ergo dum locus E (ubi aquae acceleratio ſenſibilis eſſe incipit) parum diſtat a cataracta, novi fundi linea IEC eſt manifeſte inferior quam HC, quanto magis ipſam oporteret deprimi infra HC, ſi locus E diſtaret a cataracta per dimidii milliarii intervallum, ut Barattierius in Siſterio flumine expertus fuit? Si autem hoc verum eſſet, non tantum mali immineret a cataractis quantum vulgo exiſtimatur, errarentque proinde, qui eas timide aedificarent.

Corollarium II.

647. Quam ob rem ſi progrediente aqua ex E in C, eius velocitas continuo augeretur; pars fundi EC curvilinea quoque eſſet, ſuperius cava, atque declivis. Nam quo magis velocitas aquae creſcit, eo minor viciſſim fit (580) declivitas fundi; ſi ergo dum fertur aqua ex E in C, eius velocitas continuo augeretur, tunc pars fundi EC eo minorem declivitatem haberet, quo magis accederet ad cataractae faſtigium C, hoc eſt evaderet curvilinea, ſuperius cava, atque declivis.

PROPOSITIO CXXXVII.

648. *Acceleratio motus aquae properantis ad cataractam non protrahitur uſque ad huius faſtigium.*

Plures obſervationes a praeſtantiſſimis mathematicis inſtitutae oſtendunt, aquas properantes ad cataractam, ubi factae ſunt celeriores, relinquere quoddam cavum, in quod e ſuperiori parte velociſſime delabuntur, impetuque inde concepto, adverſam acclivitatem ſuperant, et tranſiliunt cataractam. Hanc acclivitatem vidit Baciallius (a) in canali, cui de induſtria oppoſuerat cataractam. Aquae enim currentes in ſuprema fluminis ſuperficie, ut libella docebat, manifeſte acclives erant, proindeque ſi aqua vel fundum rodere potuiſſet, vel materiam, quam in fundum deiiceret, habuiſſet, utique in hoc etiam acclivitatis ſuae veſtigia reliquiſſet. Reipſa autem Baciallius hanc

Ff per-

(a) In Act. Acad. Bononien.

Digitized by Google

perſpexit acclivitatem in fundo Rheni ad Caſalicchii cataractam, eandemque Zendrinus quoque in aliis fluminibus obſervavit. His autem praemiſſis, ita oſtenditur propoſitio. Acceleratio motus aquae properantis ad cataractam deſinere ibi debet, ubi fundus e loco declivi ad alium acclivem tranſit. Sed fundus proximus cataractae, a loco ubi incipit acceleratio uſque ad cavum declivis eſt, acclivis autem a cavo uſque ad faſtigium cataractae; ergo acceleratio motus aquae properantis ad cataractam ceſſare debet in ipſo cavo, ſive antequam ipſa per eius faſtigium tranſeat.

Scholion I.

649. Eadem acclivitas, quam habet fundus proximus cataractae, in oſtiis etiam fluminum obſervatur. Gulielminus ſiquidem tradit fluvios, ubi in mare erumpunt, habere alveos altiores, et per acclive in illud ferri. Id autem ex eo fieri arbitratur, quod cum fluvii in eorum oſtiis latiſſimi eſſe ſoleant, habeantque maximas ſectiones, per has quidem tranſire poteſt conveniens aquae copia, etiamſi retardet acclivitas eius motum. Verum haec ratio non convenit cataractis, ſed alia ducta a maxima velocitate, quam aquae acquirunt in ipſo cavo, in quod tanta vi irruunt priuſquam perveniant ad cataractam. Sic enim aucta velocitate tum earum quae ſe praecipitant, tum illarum quae inſequuntur, fieri debet, ut ipſae poſtea per acclive poſſint tranſcendere cataractam, et admixtam ponderoſiorem materiam ſecum ferre.

Scholion II.

650. Non tamen colligi inde licet, novum ſtabilem fundum fluminis poſſe determinari per planum a cavo ductum, et quidem fundo veteri parallelum. Cum enim aqua appulſa ad cavum, eam ſolum haberet velocitatem, quam ob huius fundi declivitatem adipiſceretur; utique ipſi deficeret vis idonea ad transferendam per planum acclive ponderoſiorem materiam uſque ad faſtigium cataractae. Quare deiiceret hanc in fundum, qui proinde attolleretur, et conſequenter ſtabilis eſſe non poſſet.

Corollarium.

651. Quare pars fundi EC curvilinea eſſe debebit, et quidem ſuperius cava, ſed partim declivis, et partim acclivis erit: declivis quidem a puncto E uſque ad cavum, acclivis autem ab eodem cavo uſque ad faſtigium cataractae.

Digitized by Google

CAPUT XVI.

De effectibus ab unione, et diviſione horizontalium fluminum oriundis.

DEFINITIO XIX.

652. **F**Lumen *horizontale* illud appello, quod vel reipſa eſt parallelum ad horizontem, vel tale, ut velocitas ab ipſo acquiſita per deſcenſum antecedentem, ſenſibiliter ſit eliſa, et illa ſolum in eo velocitas ſit ſuperſtes, quae a currentis aquae altitudine derivatur.

PROPOSITIO CXXXVIII.

653. *Eſto* AC (*Fig.* 140.) *ſectio fluminis horizontalis, cuius altitudo* DC, *et latitudo* CB. *Tum vertice* D *circa axem* DC *deſcripta concipiatur parabola* DE. *Dico, velocitates particularum aquae effluentium per* DC, *eſſe ut ordinatae eiſdem particulis reſpondentes.*

Ducantur ordinatae HI, CE. Quoniam aqua inferior nullam aliam (ex hyp.) habet velocitatem, quam quae oritur a preſſione ſuperius incumbentis, velocitates in H, et C erunt (512) reſpective aequales illis, quas acquirere poſſet grave libere cadendo ex altitudinibus DH, DC; unde quadratum velocitatis aquae in H erit ad quadratum velocitatis eiuſdem in C, ut altitudo DH ad altitudinem DC. Sed etiam quadratum ordinatae HI eſt ad quadratum ordinatae CE, ut altitudo DH ad altitudinem DC; ergo et quadratum velocitatis in H erit ad quadratum velocitatis in C, ut quadratum ordinatae HI ad quadratum ordinatae CE; ideoque etiam velocitas in H erit ad velocitatem in C, ut ordinata HI ad ordinatam CE. Pari modo etiam conſtabit, velocitates aquae in reliquis altitudinis DC punctis eſſe ut ordinatae, quae illis reſpondent; ergo velocitates particularum aquae effluentium ex altitudine DC, erunt ut ordinatae eiſdem particulis reſpondentes.

Corollarium.

654. Hinc parabolicum ſpatium DEC erit (469) complexus velocitatum, quas ſingulae particulae aquae habent, cum tranſeunt per DC.

PROPOSITIO CXXXIX.

655. *Singulae aquae particulae, quae ſimul tranſeunt per* DC; *pari tempore abſolvunt ordinatas ſibi reſpondentes in parabola* DE.

Particula C tempore dato abſolvat ordinatam ſibi reſpondentem CE. Quia particulae C, et H motu aequabili progrediuntur ſecundum directiones CE, HI, earum velocitates erunt, ut ſpatia ab ipſis pari tempore abſoluta. Sed velocitas particulae C eſt (653) ad velocitatem particulae H, ut ordinata CE ad ordinatam HI; ergo et ordinata CE erit ad ordinatam HI, ut ſpatium tempore dato a particula C percurſum, ad ſpatium a particula alia H eodem tempore abſolutum. Sed ordinata CE (ex hyp.) eſt aequalis ſpatio tempore dato a particula C percurſo; ergo et ordinata HI aequabit ſpatium a particula H pari tempore abſolutum. Simili modo oſtendam, alias particulas etiam aquae, quae tranſeunt per DC, tempore dato abſolvere ordinatas ſibi reſpondentes in parabola DE.

Corollarium.

656. Hinc quantitas aquae effluens per DC tempore illo, quo particula C venit ex C in E, integrum occupabit parabolicum ſpatium BEC, et propterea huic aequalis erit.

PROPOSITIO CXL.

657. *Dato complexu velocitatum, quas habet aqua dum tranſit per altitudinem ſectionis in flumine horizontali, mediam eius velocitatem determinare.*

Sit AC (Fig. 140.) ſectio alicuius fluminis horizontalis, et complexus velocitatum, quas habet aqua tranſiens per DC, ſit (654) parabolicum ſpatium DEC; quaeratur autem velocitas eius media. Sumpta CM aequali duabus tertiis partibus ordinatae CE, agatur MN parallela ad axem DC parabolae DE, quae huic occurret in puncto I, et ordinetur HI. Dico, hanc eſſe mediam aquae velocitatem, quae petebatur. Compleatur enim rectangulum DCMN, quod (ut patet ex conicis) aequale erit parabolico ſpatio DEC. Iam ſi omnes aquae particulae, quae tranſeunt per DC, eandem velocitatem HI haberent qua nempe (653) particula H movetur, utique illo tempore, quo haec veniret ex H in I, per altitudinem DC tranſiret quantitas aquae aequalis rectangulo DCMN, aut ſpatio parabolico DEC, quod (ex demonſtr.) eidem rectangulo eſt aequale. Sed tem-

tempore illo, quo particula H veniret ex H in I, quantitas aquae, quae velocitatibus variis per altitudinem DC tranſit, aequatur (656) ſpatio parabolico DEC; ergo ſi ſingulae aquae particulae velocitatem HI haberent, tantum aquae tranſiret dato tempore per DC, quantum per ipſam velocitatibus variis fluit. Unde erit (472) HI velocitas media aquae per altitudinem DC fluentis.

Corollarium I.

658. Hinc velocitas media HI ad maximam CE erit, ut 2 ad 3. Nam CM eſt (657) ad CE, ut 2 ad 3. Eſt autem HI ipſi CM aequalis; ergo et HI erit ad CE, ut 2 ad 3.

Corollarium II.

659 Quia in aliis quoque perpendiculis, ſive altitudinibus ſectionis ABCD velocitas media aquae eſt eadem quae in DC; utique cum HI ſit (657) velocitas media aquae per altitudinem DC fluentis, eadem erit quoque velocitas media aquae, quae tranſit per ſectionem ABCD.

PROPOSITIO CXLI.

660. *Si parabolae* DE, GQ *(Fig. 140. 141.), ad quas terminantur velocitates aquae fluentis per altitudines* DC, GO *ſectionum* AC, LO, *fuerint tales, ut velocitas maxima aquae reſpondentis altitudini* DC, *ſit ad maximam aquae velocitatem, quae altitudini* GO *reſpondet, ut ordinata* CE *parabolae* DE *ad ordinatam* OQ *parabolae* GQ; *hae duae parabolae aequabuntur*.

Parameter parabolae DE ſit DV, parabolae autem GQ ſit GT. Quia ordinata CE eſt (ex hyp.) ad ordinatam OQ, ut velocitas aquae in C ad velocitatem aquae in O, etiam quadratum ordinatae CE erit ad quadratum ordinatae OQ, ut quadratum velocitatis in C ad quadratum velocitatis in O. Sed quadratum ordinatae CE eſt ad quadratum ordinatae OQ, ut rectangulum ex DC in DV ad rectangulum ex GO in GT, et quadratum velocitatis in C eſt ad quadratum velocitatis in O, ut altitudo DC ad altitudinem GO; ergo et rectangulum ex DC in DV erit ad rectangulum ex GO in GT, ut altitudo DC ad altitudinem GO. Id autem fieri prorſus nequit, niſi mutuo ſint aequales parametri DV, GT; ergo hae parametri aequabuntur, ac proinde parabolae DE, GQ erunt aequales etiam inter ſe.

Digitized by Google

PROPOSITIO CXLII.

661. Iiſdem poſitis, quae in theoremate praecedenti, velocitas media aquae fluentis per altitudinem DC *erit ad mediam velocitatem aquae tranſeuntis per altitudinem aliam* GO, *ut radix quadrata altitudinis* DC *ad radicem quadratam altitudinis* GO.

Ordinatae HI, RS parabolarum DE, GQ referant medias velocitates aquae fluentis per altitudines DC, GO. Velocitas media HI eſt (*658*) ad maximam CE, ut 2 ad 3. Sed in eadem quoque ratione eſſe debet velocitas media RS ad maximam OQ; ergo velocitas media HI erit ad maximam CE, ut velocitas media RS ad maximam OQ, et permutando, velocitas media HI erit ad mediam velocitatem RS, ut velocitas maxima CE ad maximam velocitatem OQ. Sed cum parabolae DE, GQ (ex hyp.) ſint aequales, velocitas maxima CE eſt ad maximam velocitatem OQ, ut radix quadrata altitudinis DC ad radicem quadratam altitudinis GO; ergo et velocitas media HI erit ad mediam velocitatem RS, ut radix quadrata altitudinis DC ad radicem quadratam altitudinis GO.

PROPOSITIO CXLIII.

662. Iiſdem poſitis, quantitates aquae dato tempore effluentes per ſectiones AC, LO *duorum fluminum horizontalium ſunt in ratione compoſita latitudinum* CB, OF, *altitudinum* DC, GO, *et radicum quadratarum altitudinum earundem.*

Quantitates aquae dato tempore effluentes per ſectiones AC, LO, ſunt (475) ut priſmata habentia pro baſibus ſectiones AC, LO, et pro altitudinibus velocitates medias HI, RS. Sunt autem haec priſmata in ratione compoſita baſium AC, LO, et altitudinum HI, RS; ergo et quantitates aquae dato tempore effluentes per ſectiones AC, LO, erunt in ratione compoſita ſectionis AC ad ſectionem LO, et velocitatis mediae HI ad mediam velocitatem RS. Sed ſectio AC eſt ad ſectionem LO in ratione compoſita latitudinis CB ad latitudinem OF, et altitudinis DC ad altitudinem GO, pariterque velocitas media HI eſt (*661*) ad mediam velocitatem RS, ut radix quadrata altitudinis DC ad radicem quadratam altitudinis GO; ergo et quantitates aquae dato tempore effluentes per ſectiones AC, GO erunt in ratione compoſita latitudinum CB, OF, altitudinum DC, GO, et radicum quadratarum altitudinum earundem.

Co-

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

663. Hinc ſi accipiatur radix quadrata altitudinis D C, eademque ducatur prius in altitudinem D C, et ſubinde in latitudinem C B; factum inde ortum exponet quantitatem aquae per ſectionem A C dato tempore effluentem. Similiter ſi ſumatur radix quadrata altitudinis G O, eademque ducatur tam in altitudinem G O, quam in latitudinem O F; productum inde emergens, exprimet quantitatem aquae, quae per ſectionem L O tempore dato fluit. Cum enim primum factum ſit ad alterum in ratione compoſita latitudinum C B, O F, altitudinum D C, G O, et radicum quadratarum altitudinum earundem; etiam quantitas aquae tranſiens per ſectionem A C erit (662) ad illam, quae pari tempore effluit per ſectionem L O, ut primum factum ad alterum.

COROLLARIUM II.

664. Quare datis latitudinibus C B, O F, et altitudinibus D C, G O duarum ſectionum A C, L O, ſtatim invenietur proportio aquarum, quae per has ſectiones tempore dato fluunt.

EXEMPLUM

665. Habeat ſectio A C latitudinem C B ped. 760, altitudinem vero D C ped. 30, cuius radix quadrata eſt $5\frac{477}{1000}$. Tum haec radix multiplicetur per altitudinem D C ped. 30, et per latitudinem C B pedum 760; factum 124875 referet (663) quantitatem aquae per ſectionem A C fluentis. Sit modo latitudo F O ſectionis L O ped. 139, altitudo autem G O ped. 11, cuius radix quadrata eſt quamproxime $3\frac{317}{1000}$. Haec radix dein multiplicetur per altitudinem G O ped. 11, et per latitudinem F O ped. 139; factum 5071 referet (663) quantitatem aquae, quae interea tranſit per ſectionem L O. Unde quantitas aquae per ſectionem A C fluentis erit ad quantitatem illius, quae interea tranſit per ſectionem L O, ut 124875 ad 5071.

PROPOSITIO CXLIV.

666. *Si latitudines* C B, O F (*Fig.* 142. 143.) *ſectionum* A C, L O *aequales fuerint inter ſe; quantitates aquae per illas dato tempore effluentes, erunt in ratione compoſita altitudinum* D C, G O, *et radicum quadratarum altitudinum earundem.*

Quantitates aquae dato tempore effluentes per ſectiones A C, L O

L O, ſunt (662) in ratione compoſita ſectionum A C, L O, et velocitatum mediarum H I, R S. Atqui ſectiones A C, L O utpote (ex hyp.) aeque latae, ſunt ut altitudines D C, G O, et velocitates mediae H I, R S, ſunt (661) ut radices quadratae altitudinum D C, G O; ergo quantitates aquae per ſectiones A C, L O dato tempore effluentes, erunt in compoſita ratione altitudinum D C, G O, et radicum quadratarum altitudinum earundem.

Corollarium

667. Unde ſi accipiantur radices quadratae altitudinum D C, G O, eaeque poſtea multiplicentur per altitudines D C, G O; facta inde orta exprimunt quantitates aquae, quae per ſectiones A C, L O tempore dato fluunt.

EXEMPLUM

668. Sit altitudo D C ped. 16, altitudo autem G O ped. 9; eritque radix quadrata altitudinis D C ped. 4, et radix quadrata altitudinis G O ped. 3. Unde factum ex radice quadrata altitudinis D C in altitudinem eandem ducta, erit ped. 64, et factum ex radice quadrata altitudinis G O per eandem altitudinem multiplicata, erit 27. Quare quantitas aquae per ſectionem A C fluentis, erit ad quantitatem aquae, quae eodem tempore tranſit per ſectionem L O, ut 64 ad 27.

Scholion

669. Hic modus determinandi rationem illam, quam habent aquae duorum fluminum inter ſe, tacite ſupponit (660) velocitates aquae fluentis per altitudines D C, G O duarum ſectionum A C, L O, terminari ad duas parabolas D E, G Q, quae non ſolum pro axibus habeant eaſdem altitudines D C, G O, et vertices in ſuperficie currenti in D et G, ſed praeterea eſſe debeant eiuſdem parametri, ſeu aequales. Nam in hac ſolum hypotheſi demonſtravimus (667), quod radices quadratae altitudinum D C, G O in eaſdem altitudines ductae, exprimant rationem, quam habent aquae duorum fluminum inter ſe. Verum enim vero etſi haec hypoteſis poſſit habere locum in liberis ſectionibus fluminum abſolute horizontalium, quorum ſuperficies velut immobiles ſunt cenſendae, non poteſt tamen in rigore geometrico convenire illis fluminibus, quae in hoc capite horizontalia appellantur; quippe aquae particulae conſtitutae in eorum ſuperficiebus, ſemper retinent aliquam ſaltem partem velocitatis a declivitate fluminis oriundae. Unde quantitas aquae fluminis iuxta adductam regulam ſupputata, ad ſummum quamproxime pro vera

ad-

Digitized by Google

mitti debet. At ſi eadem regula adhibeatur in ſupputanda quantitate aquae currentis in ſectionibus fluminum impeditis, notabilis inde error oriri poſſet. Cum enim aqua in ſectione impedita (546) altius attollatur quam ſi libera ipſa foret, utique factum ex altitudine aquae in eius radicem in primo caſu, maius erit quam factum ex altitudine aquae in eius radicem in altero. Sed eadem aquae quantitas tempore dato fluit per utramque ſectionem; ergo ſi quantitas aquae fluentis per impeditam ſectionem iuxta adductam regulam ſupputabitur, eadem iuſto maior ſemper futura erit. Cum autem, caeteris paribus, maior ſit reſiſtentia in minori flumine quam in maiori; conſequens etiam erit, ut haec regula ſemper tendat ad augendam quantitatem aquae minoris fluminis relate ad illam maioris, ſive ad augendam proportionem minoris fluminis ad aliud maius.

PROPOSITIO CXLV.

670. *Si latitudines* C B, O F (*Fig.* 142. 143.) *ſectionum* A C, L O *invicem ſint aequales; quantitates aquae per illas dato tempore tranſeuntes, erunt ut cubi maximarum velocitatum* C E, O Q.

Quantitates aquae, quae pari tempore tranſeunt per ſectiones A C, L O ſunt (666) in ratione compoſita altitudinum D C, G O, et radicum quadratarum altitudinum earundem. Sed altitudines D C, G O ſunt ut quadrata maximarum velocitatum C E, O Q, et radices quadratae altitudinum D C, G O ſunt, ut velocitates maximae C E, O Q; ergo quantitates aquae, quae pari tempore tranſeunt per ſectiones A C, L O, erunt in ratione compoſita quadratorum maximarum velocitatum C E, O Q, et earundem velocitatum C E, O Q. Sed cubus maximae velocitatis C E eſt ad cubum maximae velocitatis O Q in ratione compoſita quadratorum maximarum velocitatum C E, O Q, et earundem velocitatum C E, O Q; ergo et quantitates aquae, quae pari tempore tranſeunt per ſectiones A C, L O, erunt ut cubi maximarum velocitatum C E, O Q.

PROPOSITIO CXLVI.

671. *Si radices cubicae quantitatum aquae dato tempore effluentium per aeque latas ſectiones* A C, L O, *in ſe ipſas ducantur; illarum quadrata erunt, ut altitudines* D C, G O.

Quantitas aquae fluentis per ſectionem A C eſt (670) ad illam, quae tempore eodem tranſit per ſectionem L O, ut cubus C E ad cubum O Q. Sed quando quatuor quantitates ſunt proportionales,

 etiam

Digitized by Google

etiam illarum radices cubicae ſunt proportionales; ergo radix cubica quantitatis aquae fluentis per ſectionem A C, erit ad radicem cubicam illius, quae tempore eodem tranſit per ſectionem L O, ut C E ad O Q. Sed cum quatuor quantitates ſunt proportionales, illarum quadrata ſunt quoque proportionalia; ergo et quadratum radicis cubicae quantitatis aquae fluentis per ſectionem A C, erit ad quadratum radicis cubicae quantitatis aquae eodem tempore tranſeuntis per ſectionem L O, ut quadratum C E ad quadratum O Q. Sed cum parabolae D E, G Q (ex hyp.) ſint aequales, quadratum C E eſt ad quadratum O Q, ut altitudo D C ad altitudinem G O; ergo et quadratum radicis cubicae quantitatis aquae fluentis per ſectionem A C, erit ad quadratum radicis cubicae quantitatis aquae, quae pari tempore tranſit per ſectionem L O, ut altitudo D C ad altitudinem G O.

PROPOSITIO CXLVII.

672. *Datis altitudinibus, et latitudinibus duorum fluminum horizontalium, quorum unum in aliud influit, invenire altitudinis incrementum, quod recipiens adipiſcetur poſtquam influentis aquas in ſe exceperit.*

Sit A C (Fig. 144.) ſectio fluvii influentis, cuius data ſit tam altitudo A B, quam latitudo B C. Sit quoque D E (Fig. 145.) ſectio recipientis, cuius altitudo D F, et latitudo F E notae ſint. Debeant autem hi duo fluvii currere ſimul iuncti ſub eadem latitudine F E, et quaeratur incrementum D H altitudinis recipientis poſtquam hic exceperit influentem. Ex datis altitudinibus A B, D F, et latitudinibus B C, F E inveſtigetur (664) proportio, quam habet aqua influentis A C ad illam recipientis D E; unde ſi aqua A C intelligatur addita ipſi D E, ita ut cum hac componat aquam ſectionis H E, etiam nota fiet ratio aquae H E ad aquam D E. Nunc extrahatur radix cubica numeri, qui exponit quantitatem aquae in ſolo recipiente D E currentis, et ex illa quadratum fiat. Similiter extrahatur radix cubica numeri exponentis ſummam aquarum influentis A C, et recipientis D E, ſive aquam H E, et fiat eius quadratum. Tandem ut primum quadratum ad ſecundum, ita fiat altitudo F D ſolius recipientis ad quartum terminum proportionalem; hic (671) quaeſitam dabit altitudinem A H, ad quam recipiens attolletur poſtquam in ſe exceperit influentem. Unde ſi ab altitudine inventa F H ſubducatur alia F D, quam habebat recipiens ante unionem, prodibit D H quaeſitum eius altitudinis incrementum.

Scholion I.

673. Iuvat autem hic obſervare, quod quando dixi altitudinem recipientis ante eius unionem cum influente eſſe F D, et poſt

unionem eſſe FH, id non intelligi ita debet, ut nova aqua debeat promoveri ſub altitudine ſola DH, antiqua vero etiamnum remanere ſub altitudine priori FD. Hoc enim erroneum prorſus eſſet; quippe altitudo, ſub qua progreditur nova aqua, multo maior eſt quam DH, et contra illa, ſub qua antiqua fertur poſt unionem, multo minor eſt quam FD. Aqua enim recipientis DE, quae ante unionem cum influente habebat velocitatem ut K, eadem poſt hanc unionem cum influente, maiorem habebit velocitatem ut G; unde quantitas aquae, quae in primo caſu tempore dato per ſectionem DE fluebat, in altero caſu fluet per ſectionem IE tanto minorem prima, quanto velocitas G eſt (481) maior velocitate K. Altitudo itaque recipientis, quae ante unionem erat FD, poſt eandem reducitur ad FI. Sed altitudo iunctorum fluminum eſt FH; igitur altitudo, ſub qua progreditur nova aqua, erit IH, maior ſcilicet quam DH.

Scholion II.

674. Animadverti hic quoque debet, quod altitudinis incrementum hoc modo inventum, in praxi eſt iuſto maius. Nam quia influens AC eſt recipiente DE minus, etiam reſiſtentia in primo erit maior quam in ſecundo, et ideo adducta regula (667) ſemper tendet ad augendam quantitatem aquae influentis relate ad illam recipientis. Ex hoc autem fiet, ut altitudo FH illorum ſummae evadat etiam iuſto maior. Quamvis ergo ope adductae regulae inferri nequeat iuſta ratio, quam habent aquae duorum fluminum inter ſe; ex illa tamen deduci poteſt altitudinis incrementum ſaltem non minus vero, quod recipiens ob unionem influentis adipiſcetur.

Exemplum.

675. Influens AC habeat latitudinem BC ped. 130., et altitudinem AB ped. 11. Sit quoque latitudo FE recipientis DE ped. 760, altitudo autem DF ped. 30, eritque (665) aqua currens in influente, expoſita numero 5071; illa vero quae fluit in recipiente, expreſſa erit numero 124875. Si autem hanc iunxeris cum priori, habebis aquarum ſummam expreſſam numero 129946. Iam ſi radix cubica extrahatur ex primo numero 124875, ipſa invenietur $49 \frac{98}{100}$, cuius quadratum eſt 2498. Similiter radix cubica ſecundi numeri 129946 eſt $50 \frac{65}{100}$, cuius quadratum eſt ferme 2565. Unde ſi fiat, ut 2498 ad 2565, ita altitudo recipientis FD ped. 30 ad quartum terminum proportionalem, qui erit ped. 30, et poll.

 10;

10; hic quaeſitam dabit (671) altitudinem FH fluminum coniunctorum, ed ideo incrementum DH erit poll. 10.

PROPOSITIO CXLVIII.

676. *Si eadem quantitas aquae eidem flumini horizontali diverſis temporibus adiiciatur; altitudinis incrementum, quod ipſa in eo gignet, pro vario eiuſdem ſtatu diverſum erit.*

Sive parva, ſive magna ſit velocitas fluminis horizontalis, eadem (511) ſemper oritur a ſolo pondere, aut preſſione eius aquae ſuperioris in inferiorem. Sed quando eadem quantitas aquae diverſis temporibus eidem horizontali flumini ſuperadditur, huic pariter idem pondus, et eadem preſſio rurſus accedit; ergo etiam velocitas eius aquae aequaliter ſemper creſcet, ideoque adiecta aqua non magis accelerabit tardum motum fluminis conſtituti in exiguae aquae ſtatu, quam celeriorem quo fertur dum mediocres habet aquas, aut etiam velociſſimum quo movetur in ſtatu maximae eluvionis. Quare velocitas, quam poſt novam additam ſibi aquam, habebit flumen, minor etiamnum erit in exiguae aquae ſtatu, maior in ſtatu aquae mediocris, maxima tandem in ſtatu maximae eluvionis. Cum itaque nova aqua, quam excipit in ſe flumen conſtitutum in exiguae aquae ſtatu, ſupra hoc tardius progrediatur, quam dum mediocrem aquam continet, aut eſt in ſtatu maximae eluvionis; conſequens etiam erit, ut eadem in primo caſu maximum altitudinis incrementum (412) in eo gignat, mediocre in ſecundo, minimum autem in tertio. Ergo ſi eadem quantitas aquae eidem flumini horizontali diverſis temporibus adiiciatur, altitudinis incrementum, quod in eo gignet, pro vario eius ſtatu diverſum erit.

COROLLARIUM

677. Si ergo aliquis fluvius ſemper manens in eodem ſtatu, diverſis temporibus in alium influat; altitudinis incrementum, quod producet in recipiente, pro vario huius ſtatu diverſum erit. Illud ſiquidem erit (676) maximum, ſi dum influens tranſit in recipientem, ſit hic in exiguae aquae ſtatu; mediocre vero, ſi in mediocris aquae ſtatu; minimum tandem, ſi in ſtatu maximae eluvionis.

PROPOSITIO CXLIX.

678. *Si eadem quantitas aquae ab eodem flumine diverſis temporibus auferatur; altitudinis decrementum, quod in eo gignet, pro diverſo eius ſtatu diverſum erit.*

Dum

Dum eadem aquae copia diverſis temporibus eidem flumini ſuperadditur, incrementum altitudinis quod producit in recipiente, maximum (676) eſt, ſi inveniat ipſum in ſtatu maximae depreſſionis; mediocre vero, ſi in mediocris aquae ſtatu; minimum tandem, ſi in ſtatu maximae eluvionis. Igitur e contrario, ſi eadem aquae copia, quae prius in flumen ingreſſa erat, diverſis temporibus ab hoc poſtea ſubtrahatur; maximum futurum erit decrementum altitudinis in eodem, dum ipſum exiguas aquas defert; mediocre vero, ſi fuerit in mediocris aquae ſtatu; minimum tandem, ſi in ſtatu maximae eluvionis. Quare ſi eadem quantitas aquae ab eodem flumine diverſis temporibus auferatur; decrementum altitudinis, quod in eo gignet, pro vario eius ſtatu diverſum erit.

Corollarium.

679. Quapropter ſi quando flumen eſt in ſtatu maximae eluvionis, pars aliqua eius aquae ſe exoneret in canalem de induſtria excavatum, tunc fluminis ſuperficies inſenſibiliter deprimetur.

Scholion

680. At aliquis forſan inquiet: ſi dum eſt flumen in ſtatu maximae eluvionis, in eius aggere efficiatur hiatus aliquis ſatis magnus, per quem effluat eius aqua, ſtatim videmus eius ſuperficiem deprimi ſenſibiliter; cur ergo non etiam ſenſibiliter deprimetur, cum eiuſdem fluminis aqua effluit per canalem ad eundem aggerem applicatum? Fateor quidem aquam ob enormem declivitatem quam habet initio effluxus, copioſe transfluere in canalem, et ſic fluminis ſuperficiem ſenſibiliter etiam deprimi; paullo poſt tamen quia impleto canali, magna ex parte haec declivitas evaneſcit, longe minor pariter aquae copia influit in eundem; ex quo fieri debet, ut brevi fluminis ſuperficies ad priorem ferme altitudinem reducatur. Accedit etiam, quod flumen poſt amiſſam aquam quae influit in canalem, habebit in tractu alvei inferioris vim multo minorem illa, quam habet in ſuperiori, propterea ſi in hoc habeat praeciſe vim ſufficientem ad craſſiores terrae particulas transferendas, ineptam omnino habebit in inferiori. Igitur haec materia extranea deponetur in eius fundo, qui propterea altior factus in cauſa erit, ut licet flumen minorem deferat aquae copiam, in agros tamen finitimos effundatur. Quare diductio aquae ex flumine in canalem de induſtria excavatum ad avertendam ab agris finitimis alluvionem, plus detrimenti, quam commodi afferre ſolet.

F I N I S.

Digitized by Google

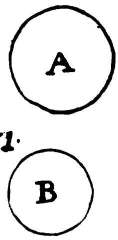


Fig. 1.

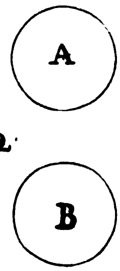


Fig. 2.

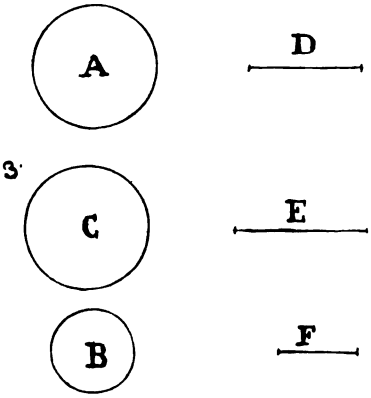


Fig. 3.

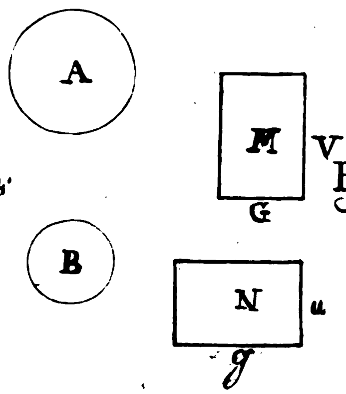


Fig. 4.

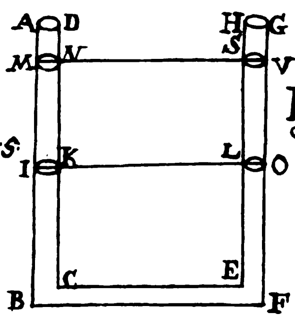


Fig. 5.

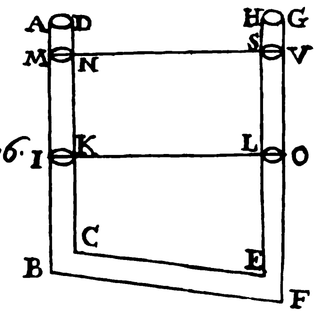


Fig. 6.

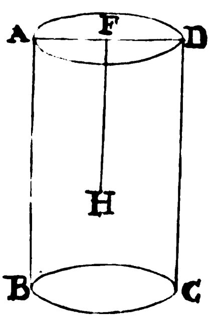


Fig. 7.

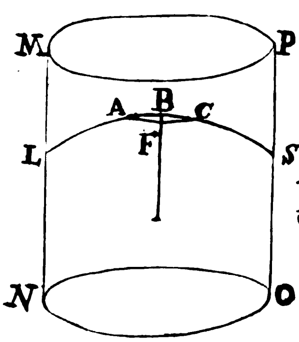


Fig. 8.

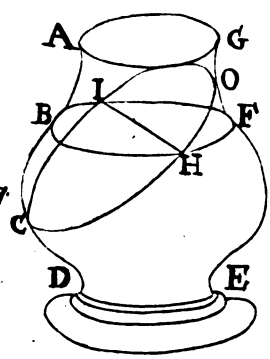


Fig. 9.

Digitized by Google

Fig: 10.

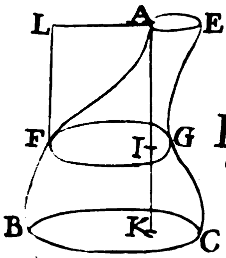


Fig: 11.

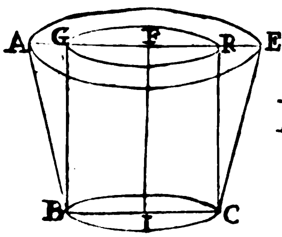


Fig: 12.

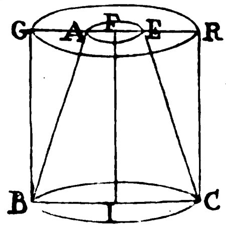


Fig: 13.

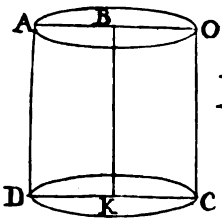


Fig: 14.

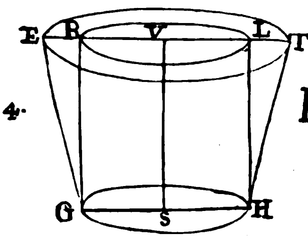


Fig: 15.

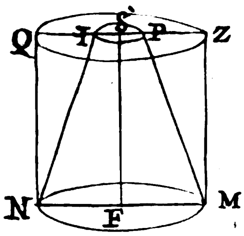


Fig: 16.

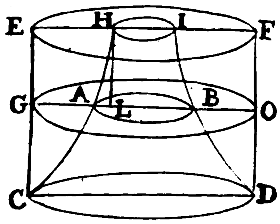


Fig: 17.

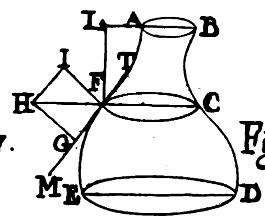


Fig: 18.

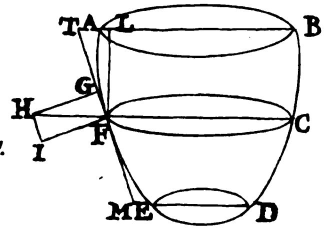


Fig: 19.

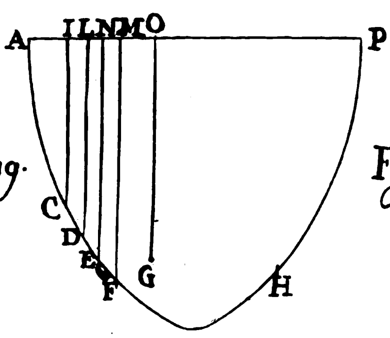
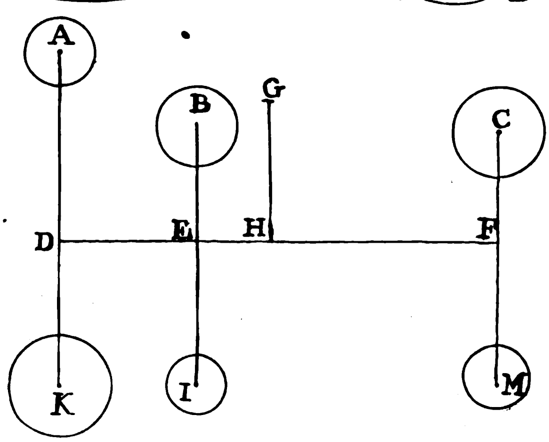


Fig: 20.



Digitized by Google

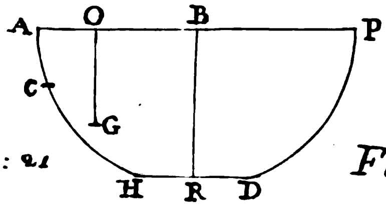


Fig: 21

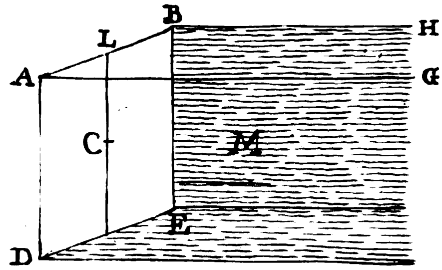


Fig: 22

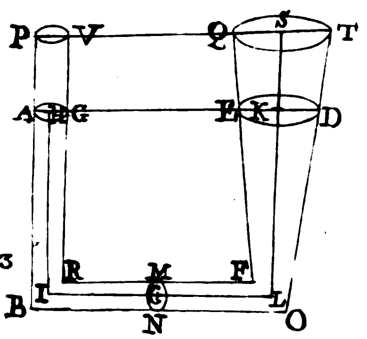


Fig: 23

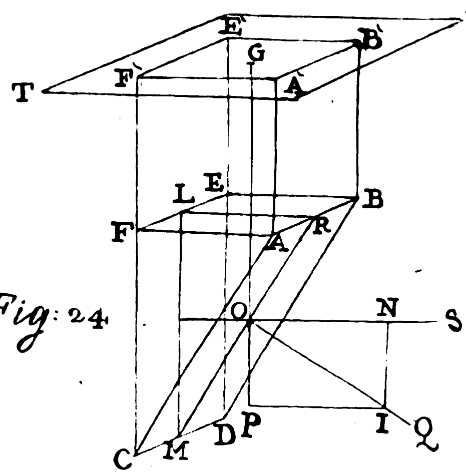


Fig: 24

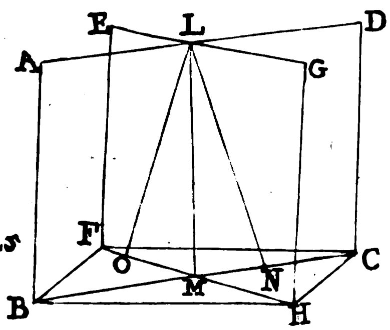


Fig: 25

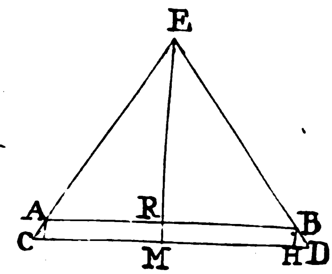


Fig: 26

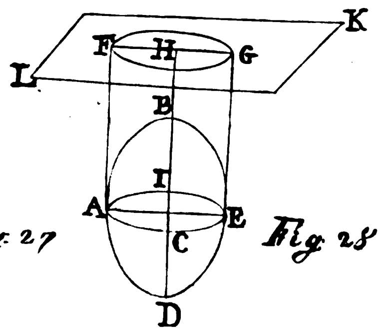


Fig: 27

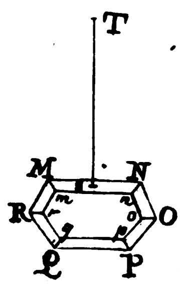


Fig: 28

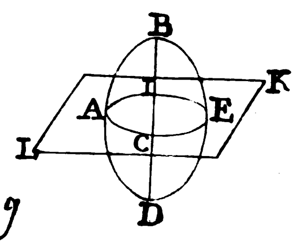


Fig: 29

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig: 30

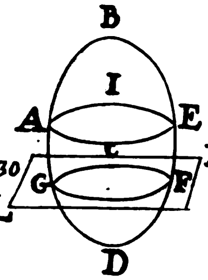


Fig: 31

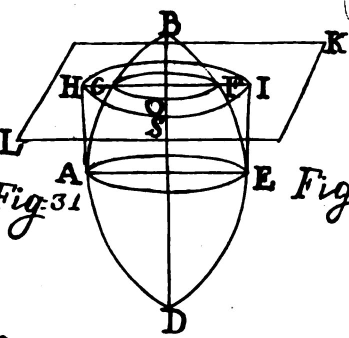


Fig: 32

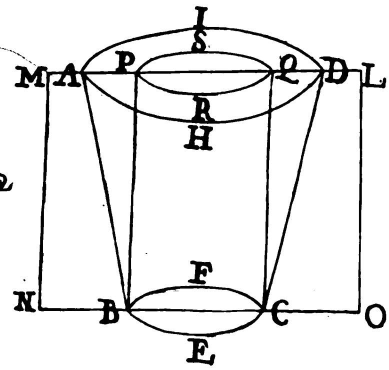


Fig: 33

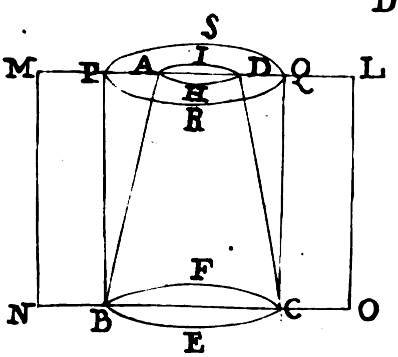


Fig: 34

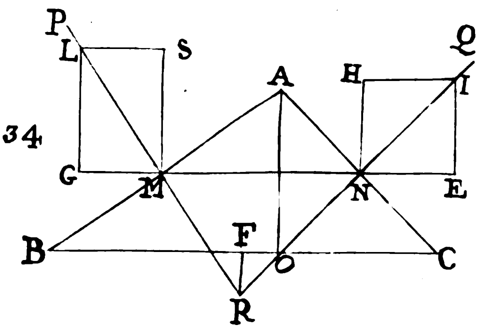


Fig: 35

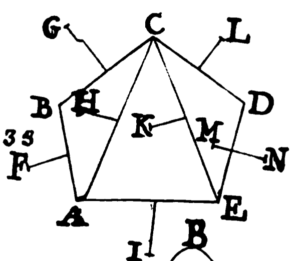


Fig: 36

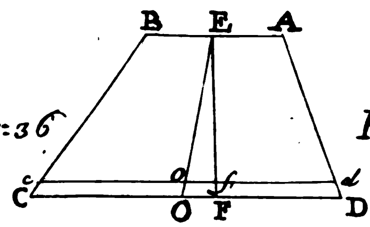


Fig: 37

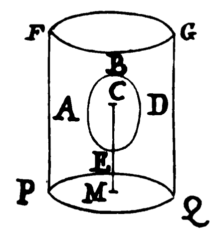


Fig: 38

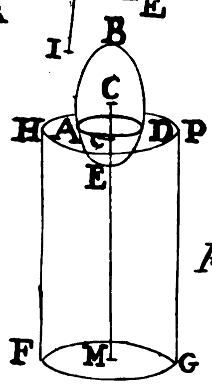


Fig: 39

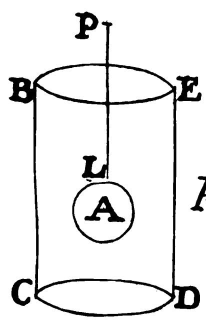
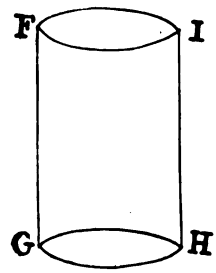


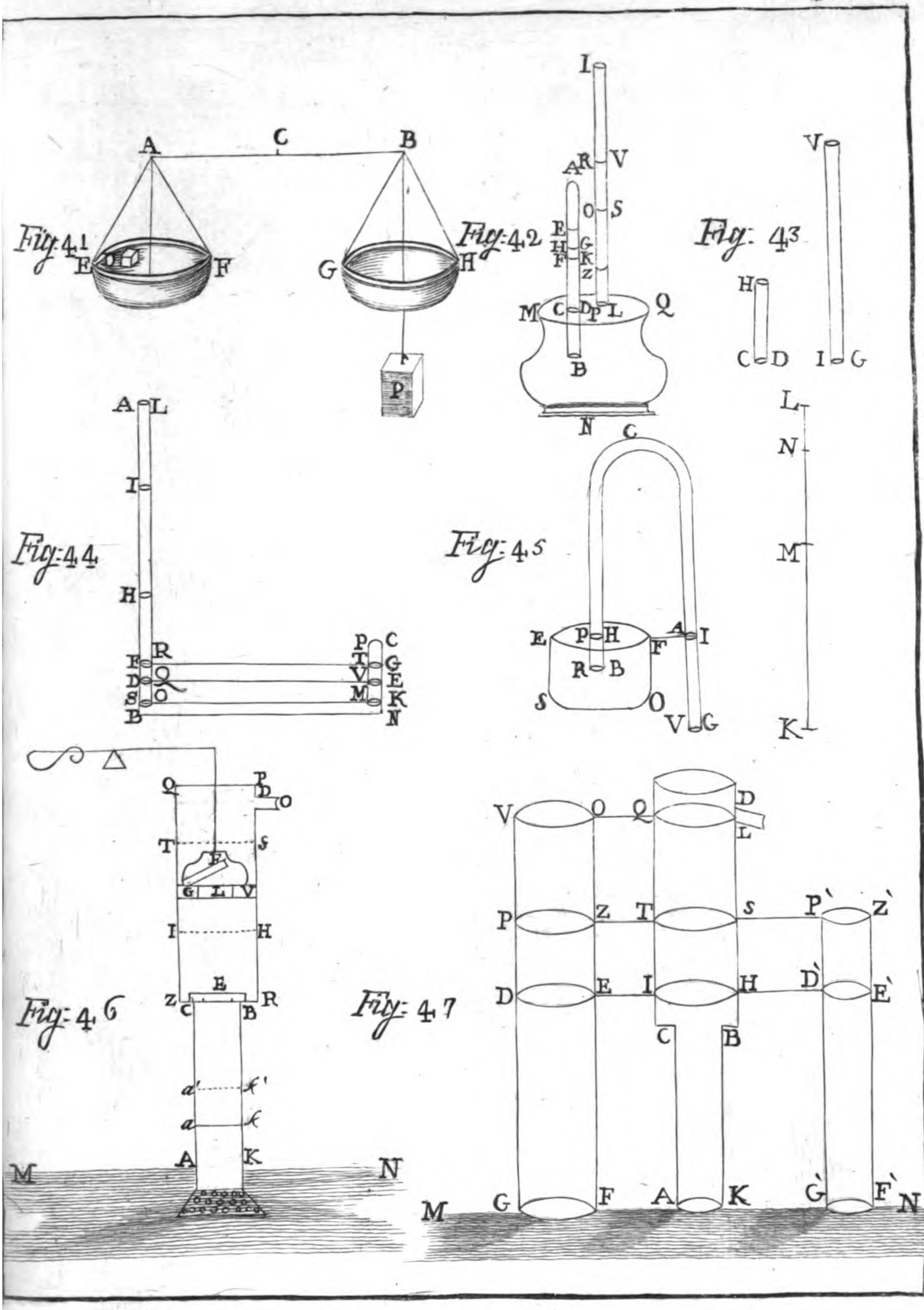
Fig: 40



Digitized by Google

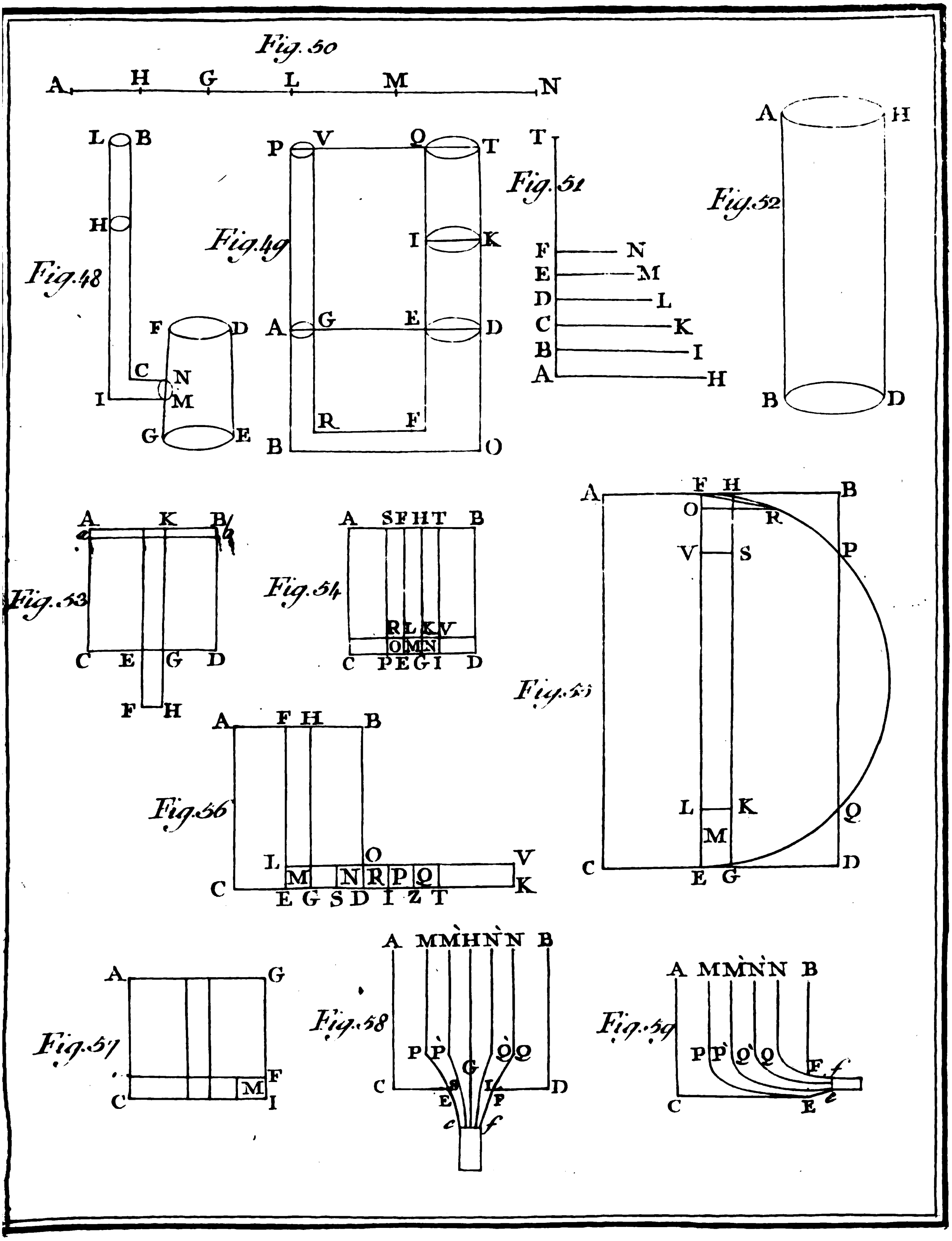
Digitized by Google

Tab: V



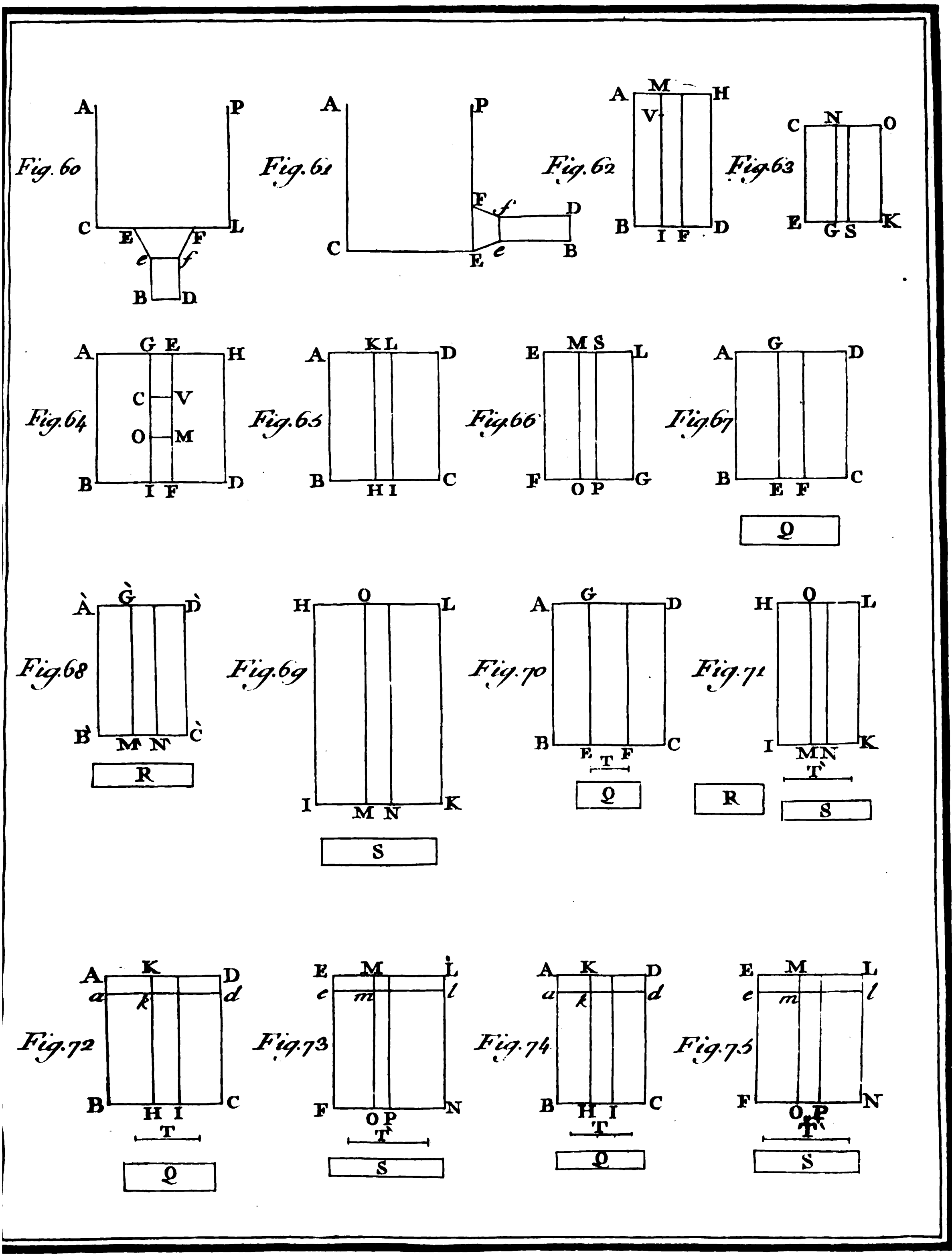
Digitized by Google

Digitized by Google



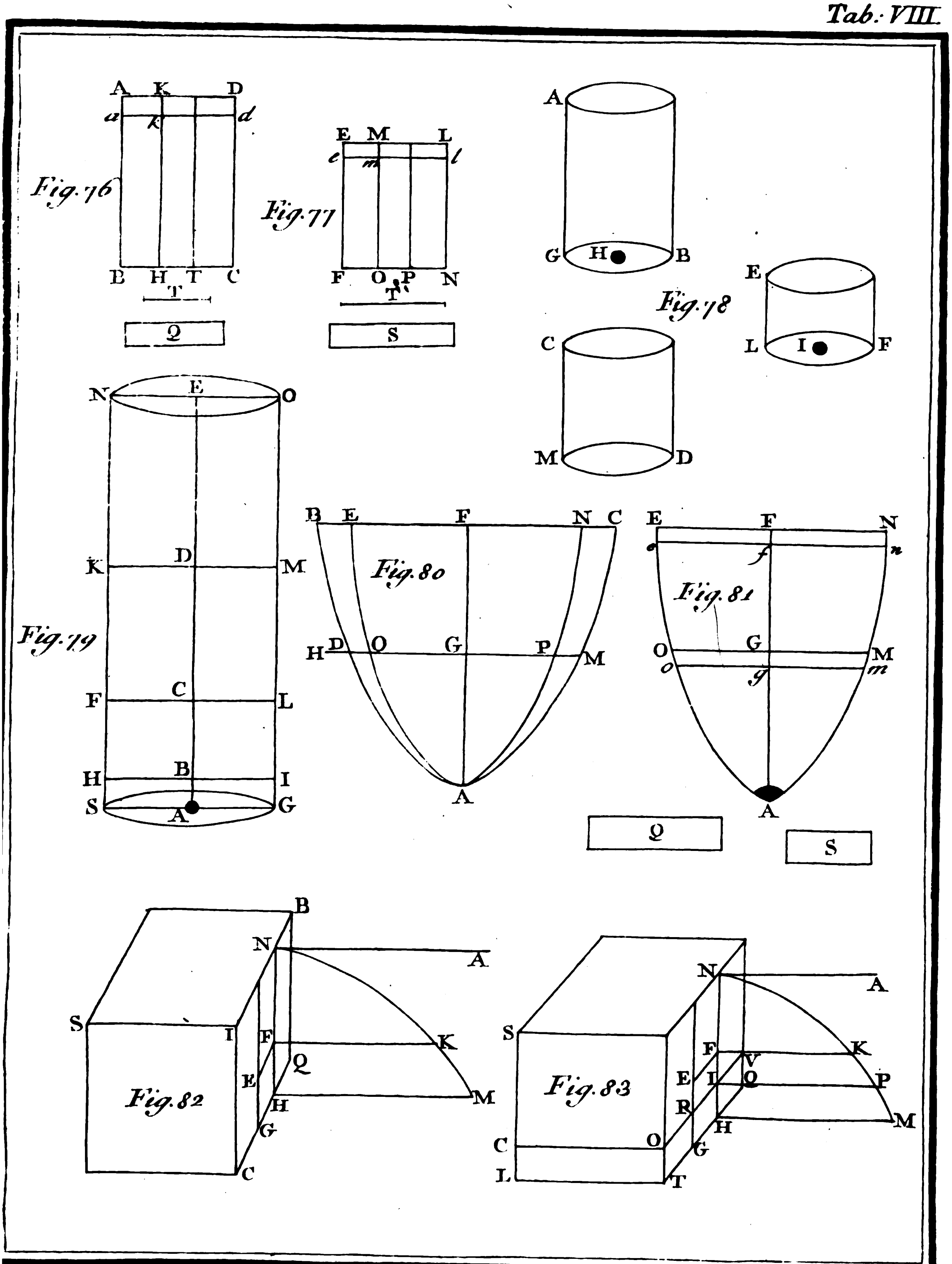
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google


Fig. 76
A K D
a k d
B H T C
T
Q
Fig. 77
E M L
e m l
F O P N
T
S
Fig. 78
A G H B
C M D
E L I F
Fig. 79
N E O
K D M
F C L
H B I
S A G
Fig. 80
B E F N C
H D O G P M
A
Fig. 81
E F N
e f n
O G M
o g m
A
Q
S
Fig. 82
B N A
S I F Q K
E H M
G C
Fig. 83
N A
S F V K
E I Q P
R H M
C O G
L T

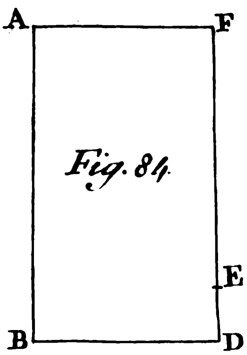


Fig. 84.

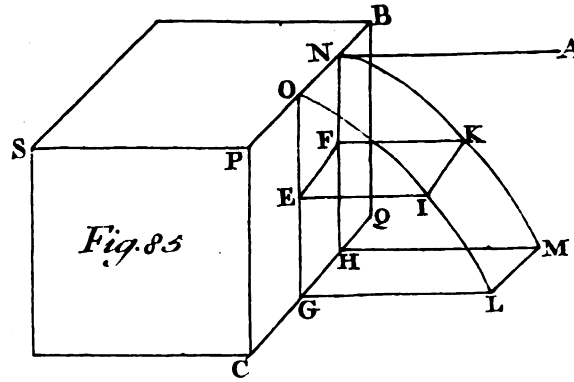


Fig. 85.

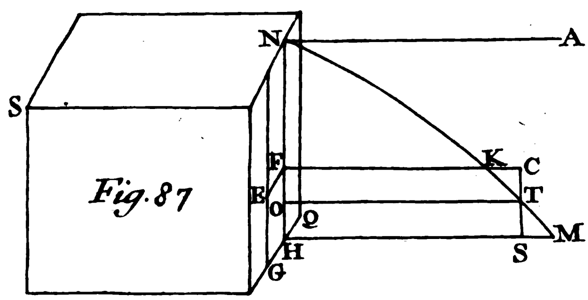


Fig. 87.

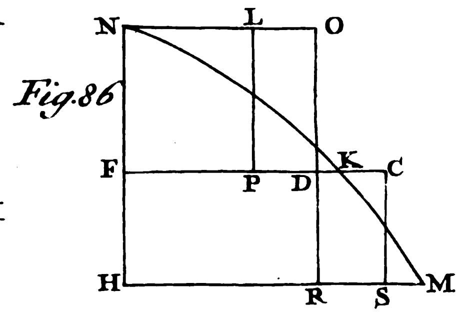


Fig. 86.

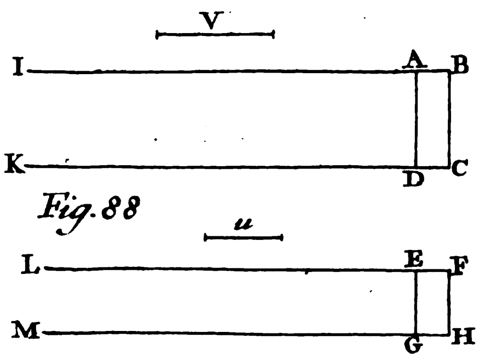


Fig. 88.

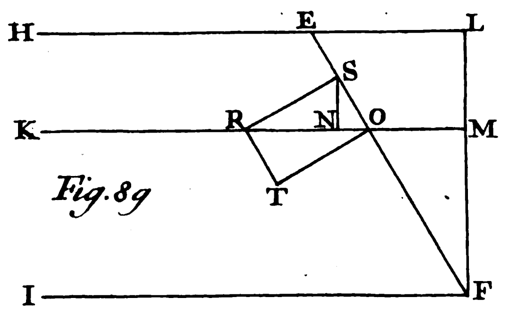


Fig. 89.

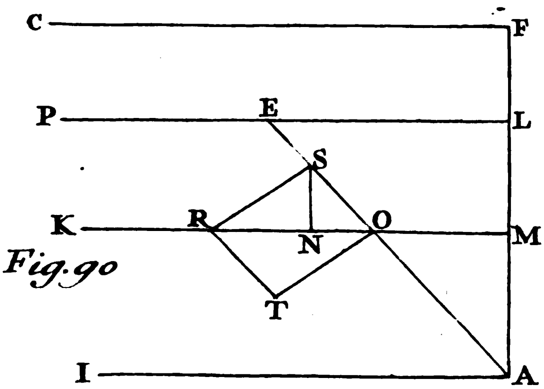


Fig. 90.

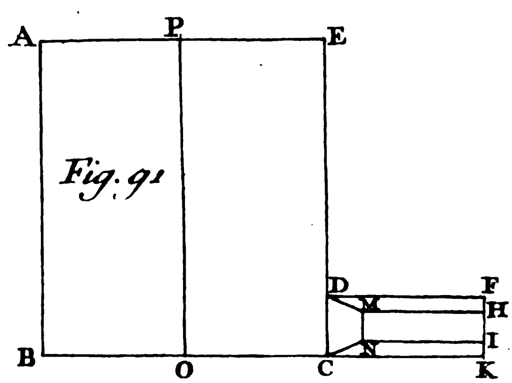


Fig. 91.

Digitized by Google

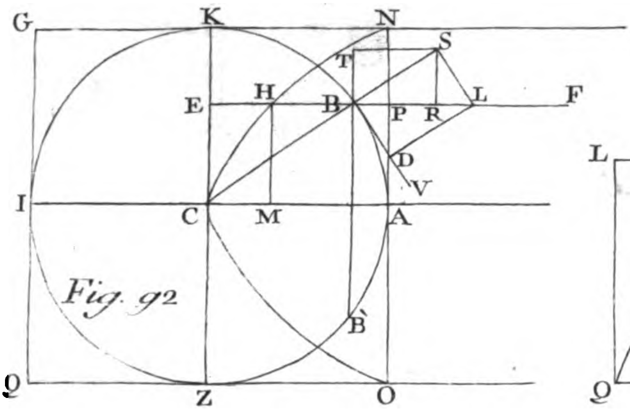


Fig. 92

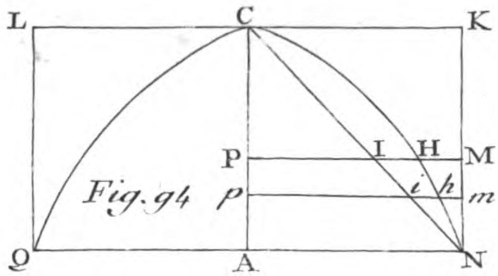


Fig. 94

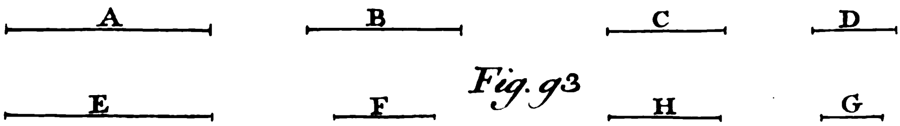


Fig. 93

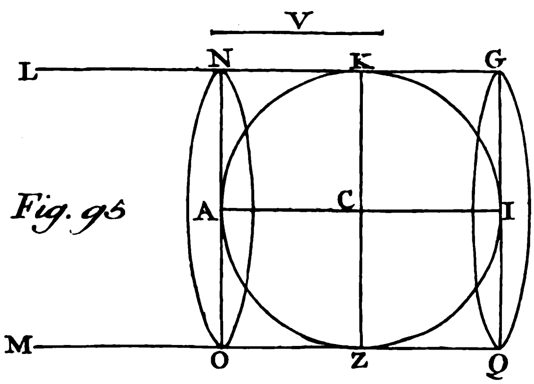


Fig. 95

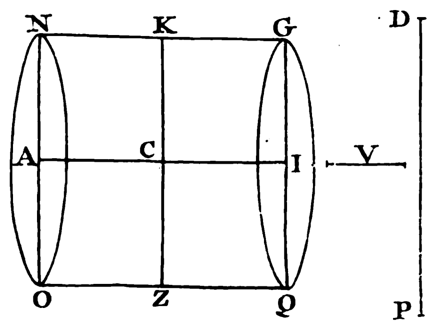


Fig. 97

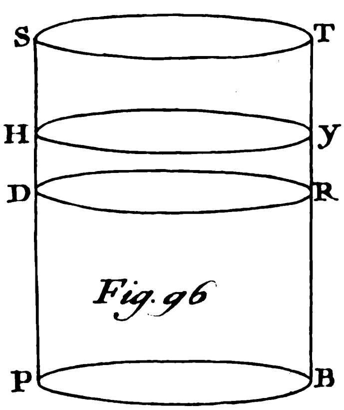
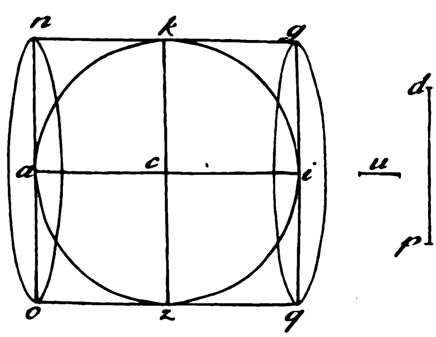
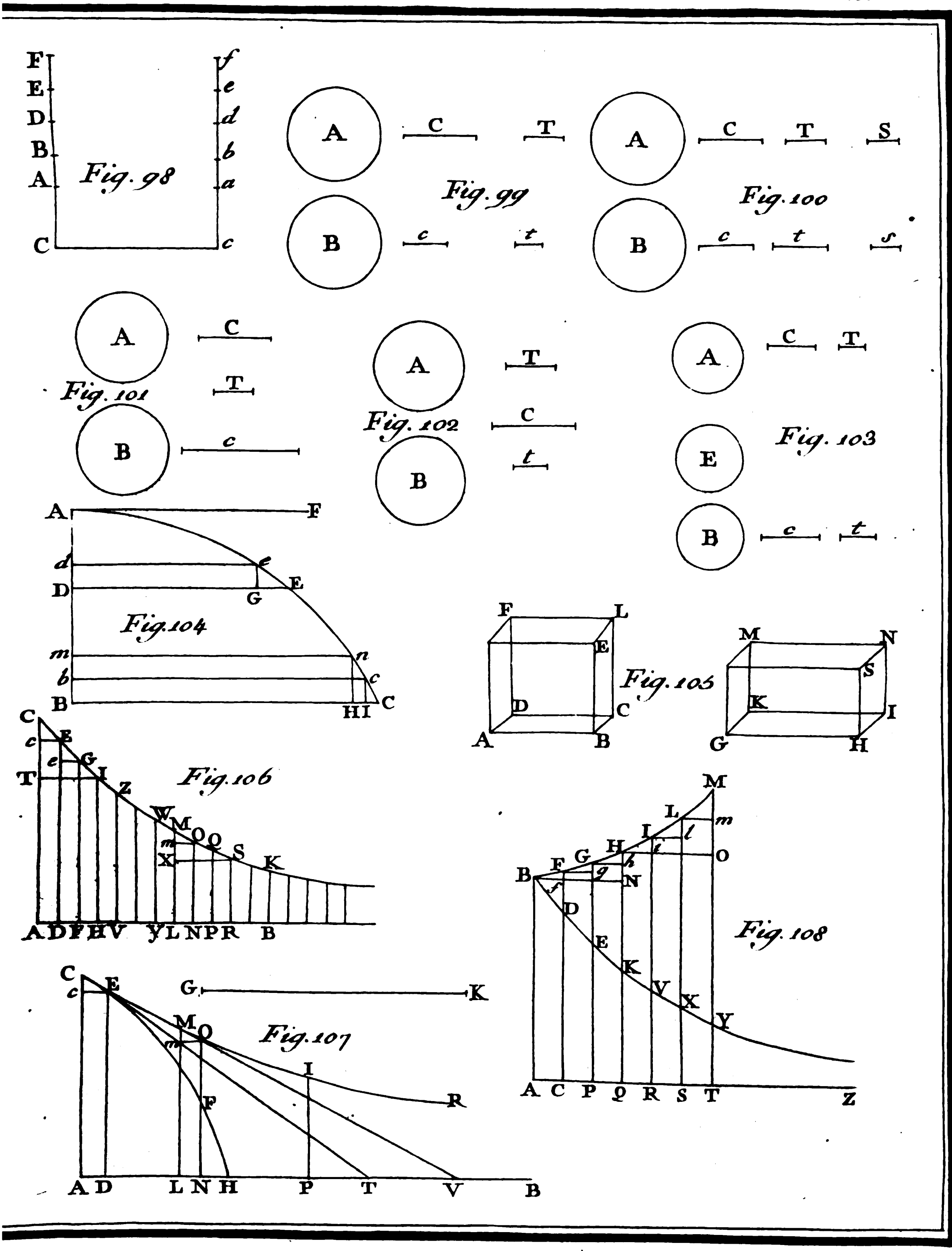


Fig. 96



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

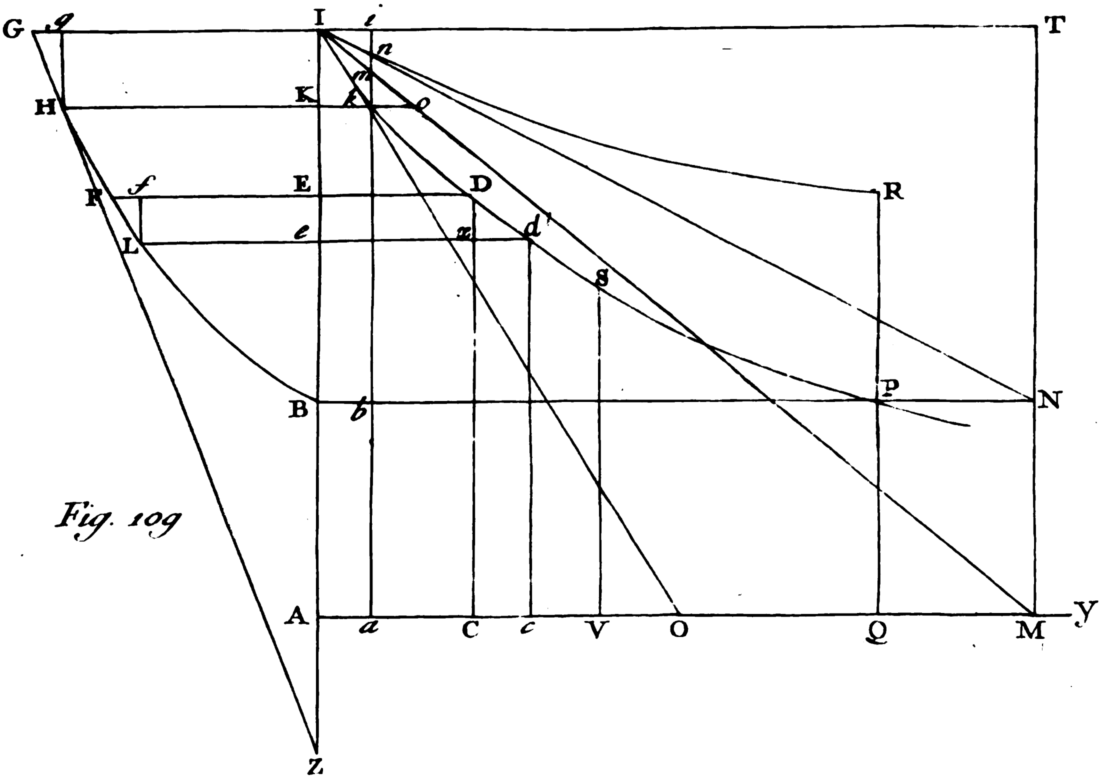


Fig. 109

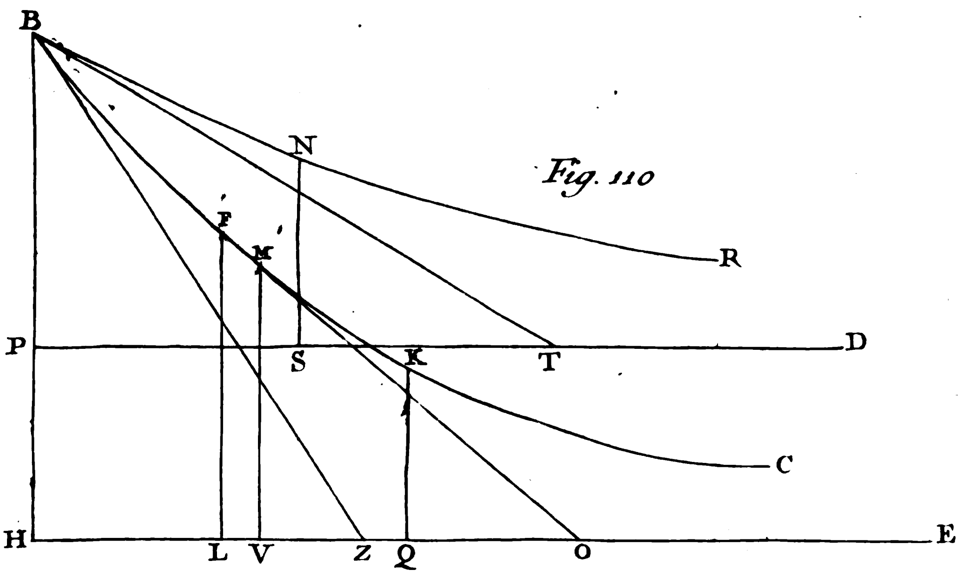


Fig. 110

Digitized by Google

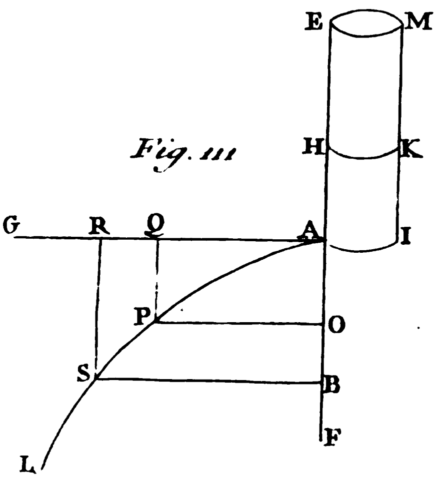


Fig. 111

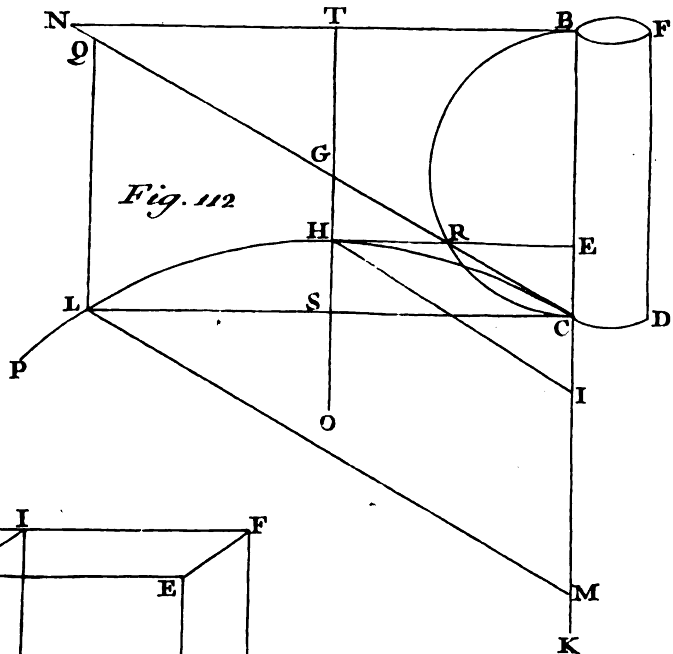


Fig. 112

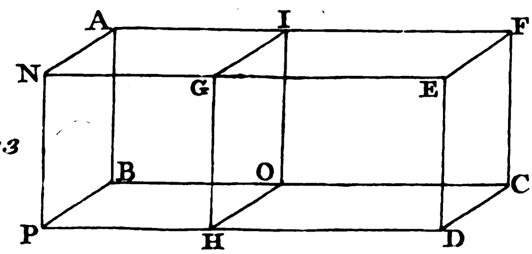


Fig. 113

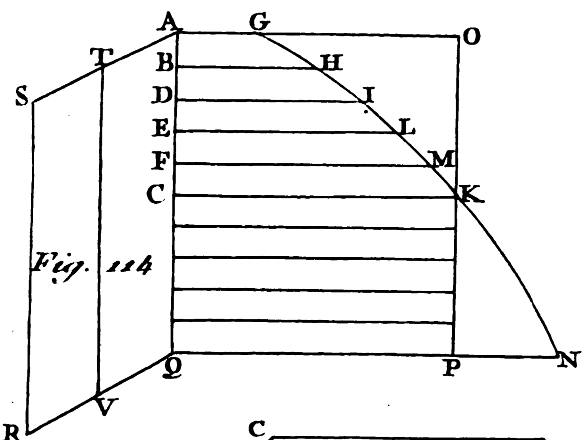
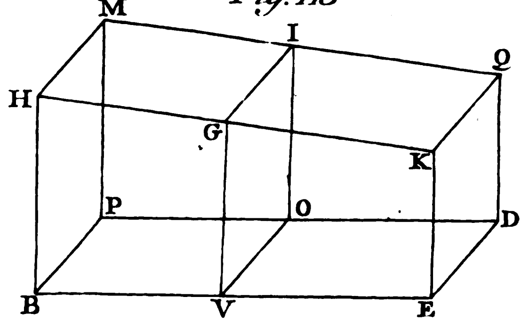


Fig. 114

Fig. 115



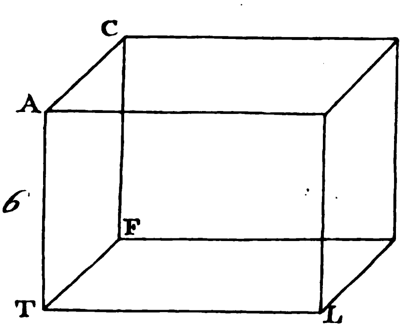


Fig. 116

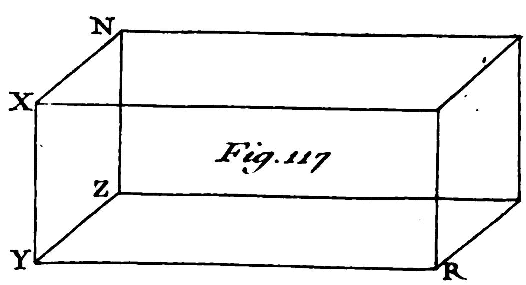


Fig. 117

Digitized by Google

Digitized by Google

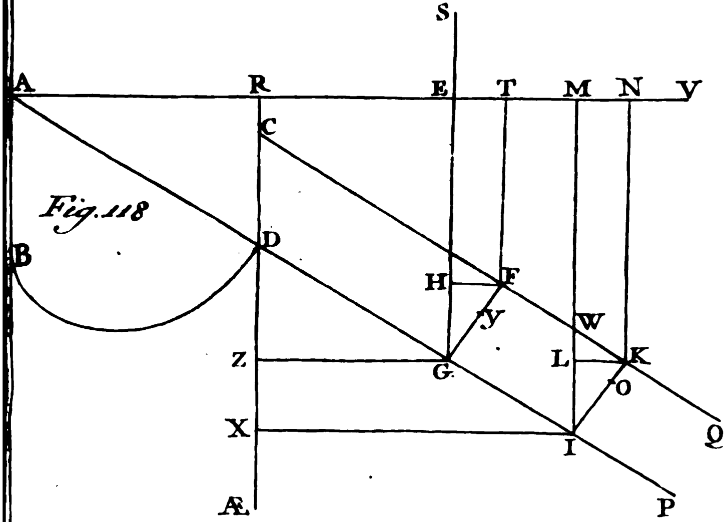


Fig. 118

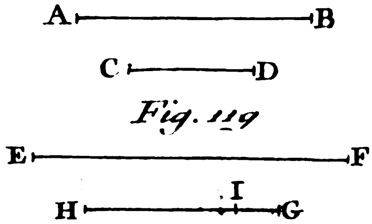


Fig. 119

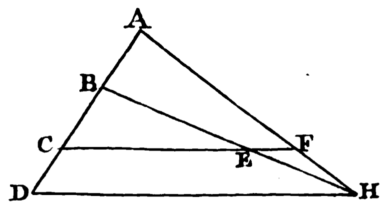


Fig. 120

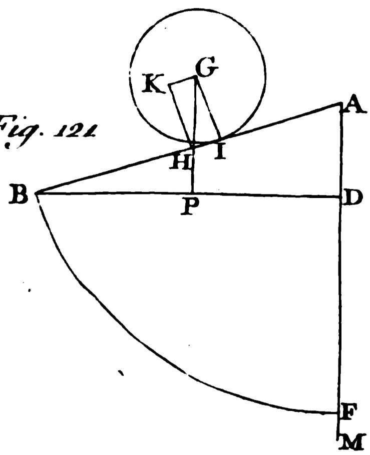


Fig. 121

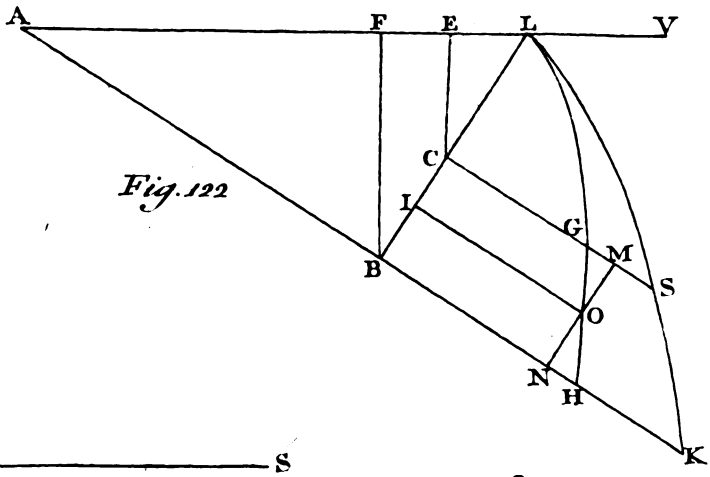


Fig. 122

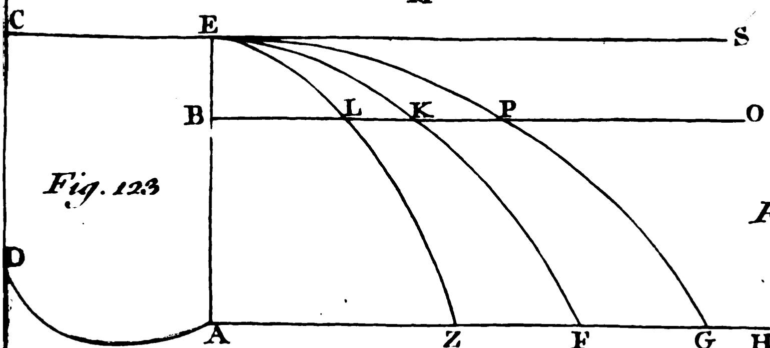


Fig. 123

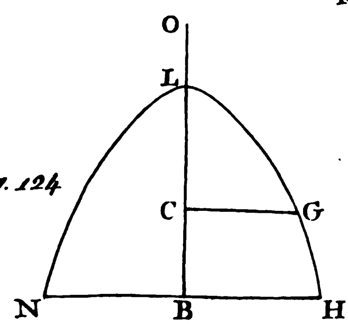


Fig. 124

Digitized by Google

Digitized by Google

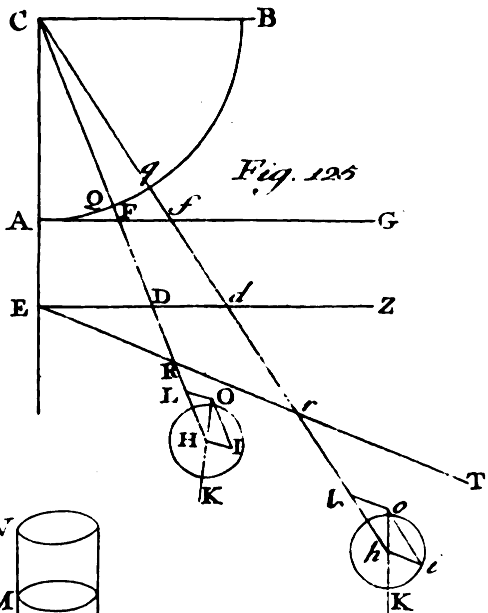


Fig. 125

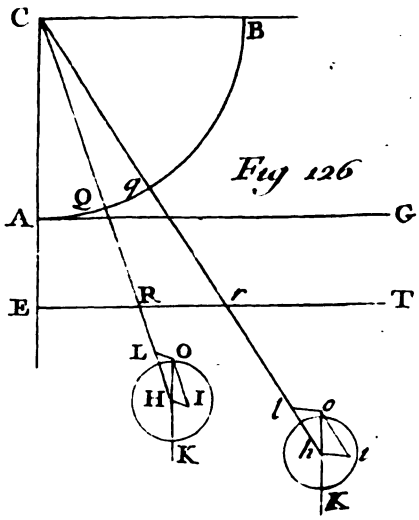


Fig. 126

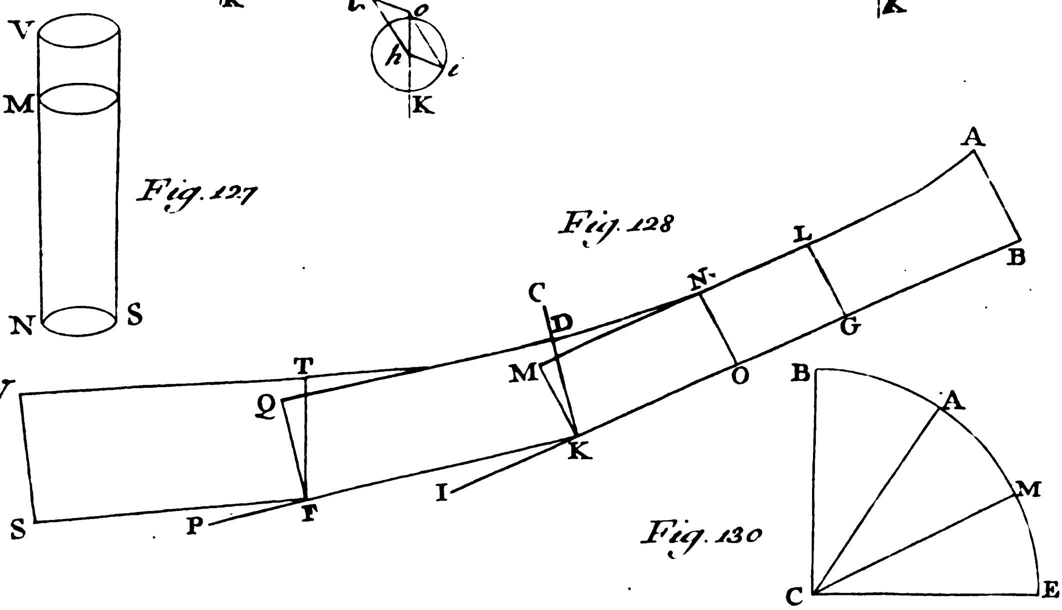


Fig. 127

Fig. 128

Fig. 130

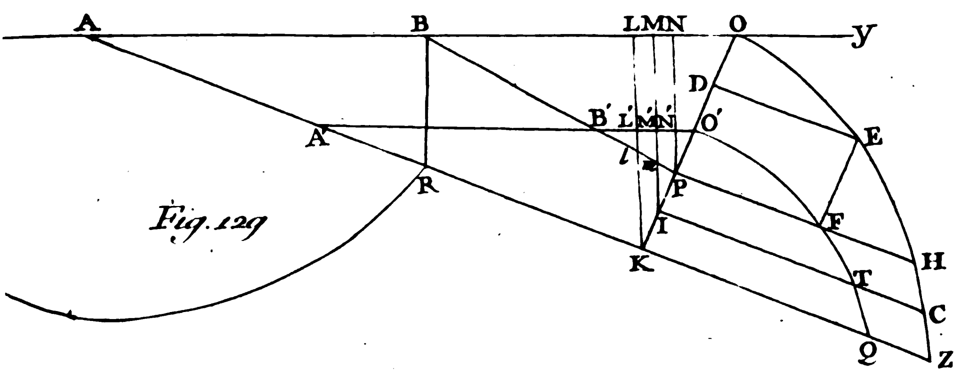


Fig. 129

Digitized by Google

Digitized by Google

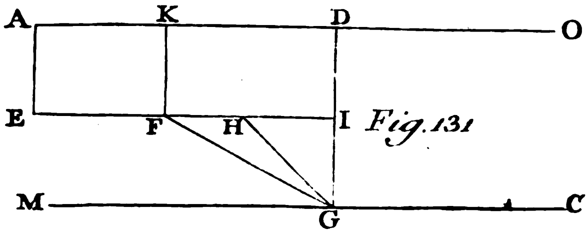


Fig. 131

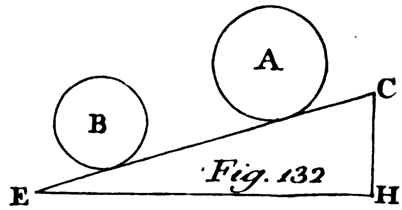


Fig. 132

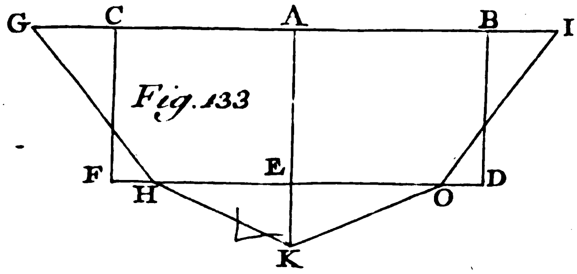


Fig. 133

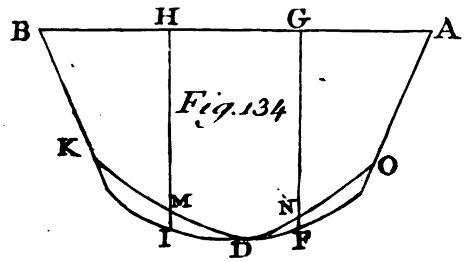


Fig. 134

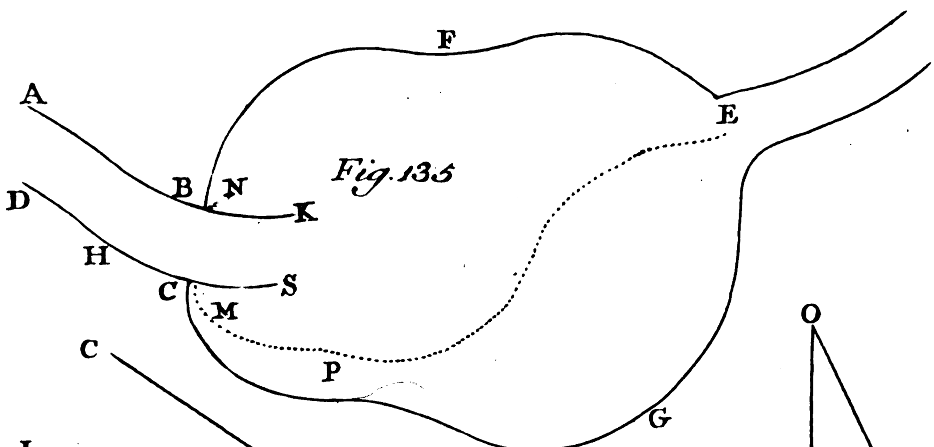


Fig. 135

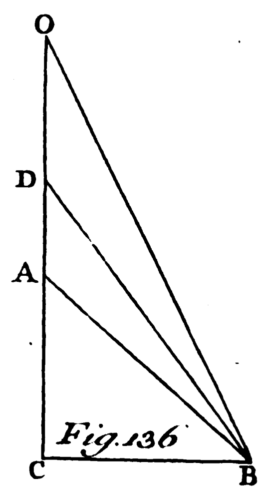


Fig. 136

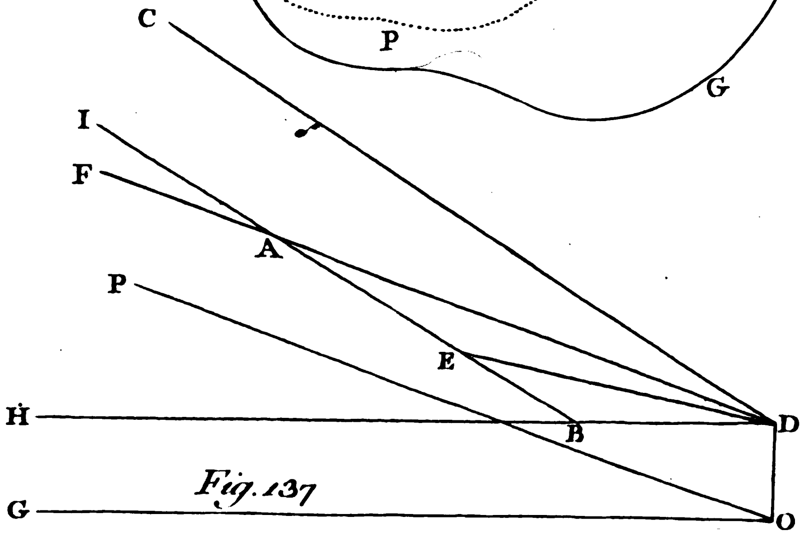


Fig. 137

Digitized by Google

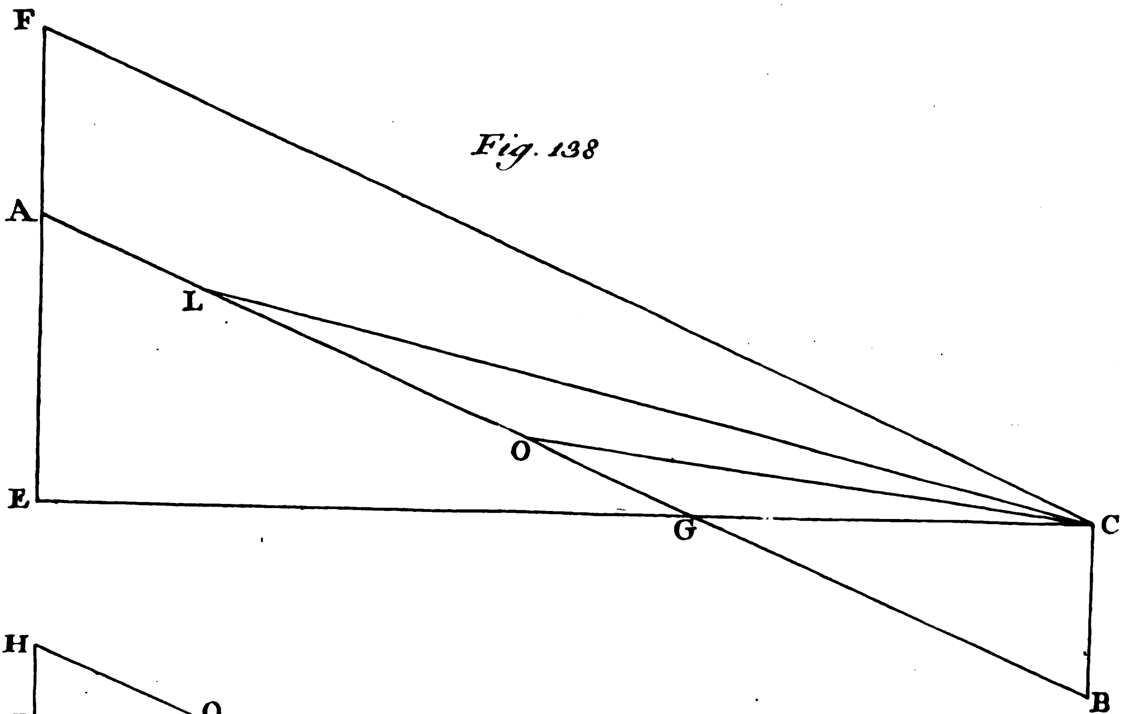


Fig. 138

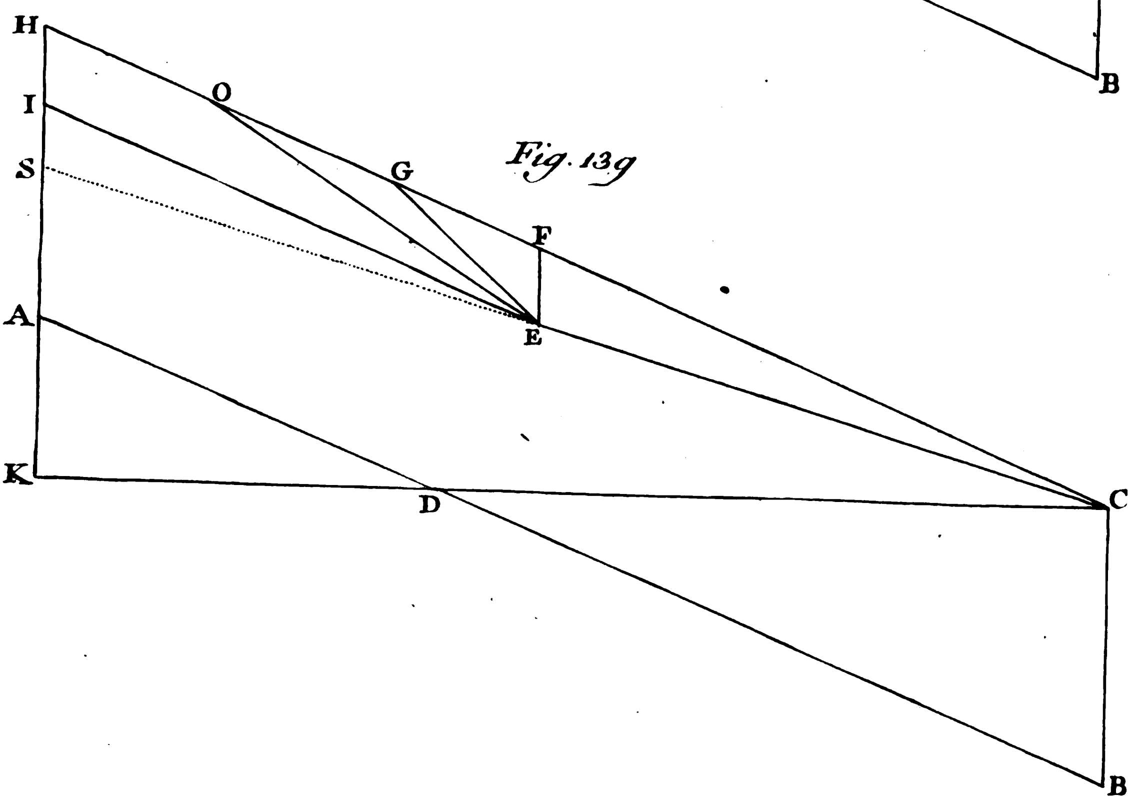


Fig. 139

Digitized by Google

Digitized by Google

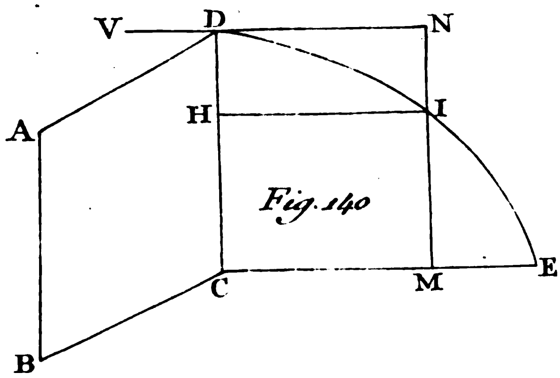


Fig. 140

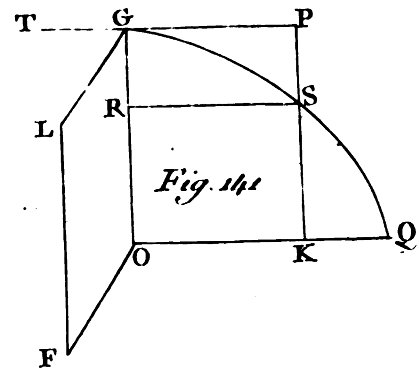


Fig. 141

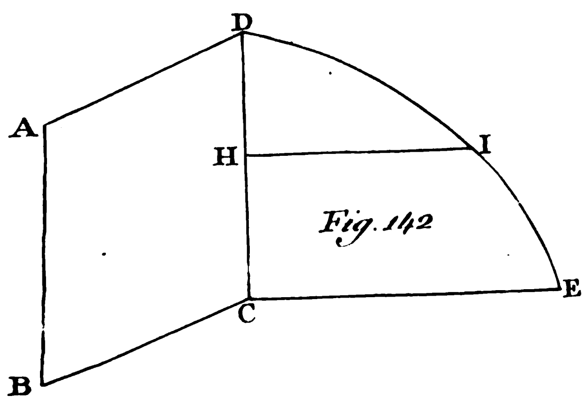


Fig. 142

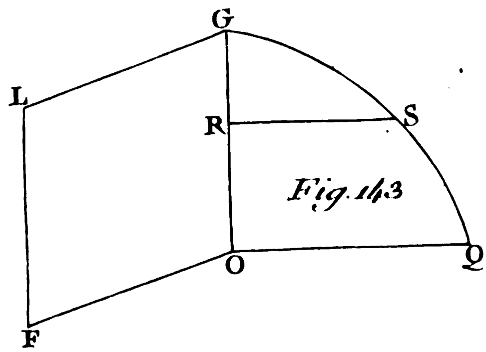


Fig. 143

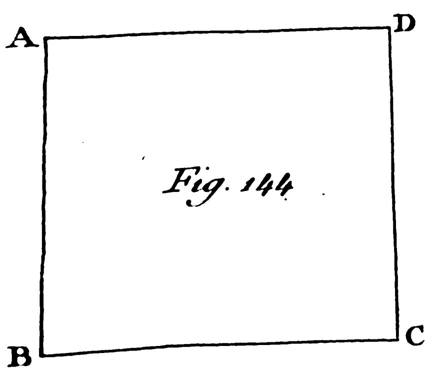


Fig. 144

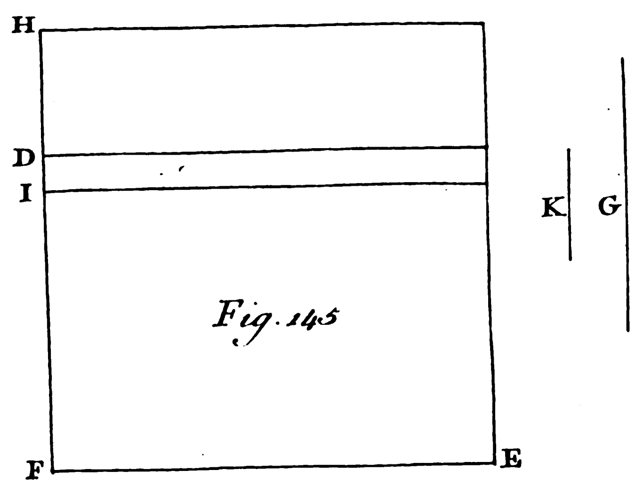


Fig. 145

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google